



Laboratoire POEMS
UMR 7231 CNRS-ENSTA-Inria
828 Boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex



Unité de Mathématiques Appliquées
de l'ENSTA Paris
828 Boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

Projet de Recherche

Spécialité : *Mathématiques Appliquées*

Année scolaire : 2023–2024

Homogénéisation numérique de problèmes à interfaces fractales

Armand WAYOFF

Promotion : 2025

Stage effectué du 13 mai au 9 août 2024
à l'Unité de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA Paris

Encadrants de stage : Patrick Joly et Maryna Kachanovska

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude aux membres de l'équipe POEMS pour leur accueil chaleureux et les nombreux échanges fructueux qui ont enrichi cette expérience. Je remercie particulièrement mes encadrants, Patrick Joly, directeur de Recherche et Maryna Kachanovska, chargée de Recherche, pour leur disponibilité, leurs précieux conseils, et pour m'avoir proposé un sujet de stage passionnant qui m'a permis d'avoir un aperçu du monde de la recherche. Merci également à Sonia Fliss, responsable du parcours *ModSim* à l'ENSTA, de m'avoir présenté à mes encadrants.

Je remercie l'UMA pour les excellentes conditions de travail offertes qui ont grandement facilité mon travail. Enfin, je n'oublie pas de remercier tous ceux, chercheurs et doctorants, qui ont pris le temps de discuter et de partager leurs connaissances, contribuant ainsi à faire de ce stage une expérience aussi enrichissante sur le plan intellectuel qu'humain.

Résumé

Ce rapport de projet de recherche présente une étude de l'article *Numerical homogenization of fractal interface problems* [KPY22] de Ralf Kornhuber, Joscha Podlesny et Harry Yserentant. L'objectif dans ce rapport est de reprendre l'ensemble des objets introduits, d'explicitier les démonstrations en détaillant les étapes clés et de proposer des éléments de vulgarisation des approches présentées dans l'article d'origine pour en rendre l'accès plus intuitif et compréhensible.

L'ensemble de l'article est abordé dans le but d'obtenir une vue d'ensemble, allant des constructions théoriques au développement de méthodes numériques.

Mots-clés. Problème à interfaces fractales. Homogénéisation non périodique. Inégalité locale de type Poincaré. Méthode LOD.

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	Description du problème & Objectif général	6
1.2	Motivations	6
1.3	Pourquoi les éléments finis classiques ne sont pas adaptés? [MP13, Sec. 2.1]	7
1.4	Objectifs plus précis	7
I	Définition et construction rigoureuse du problème	8
2	Notations et définitions	9
2.1	Définition formelle d'un réseau d'interfaces fractal	9
2.2	Interprétation du point de vue de la modélisation	11
2.3	Exemple d'un réseau d'interfaces fractal fortement localisé	11
2.4	Espaces fonctionnels fractals	12
3	Construction d'un espace fractal asymptotique complet	16
3.1	Construction abstraite	16
3.2	Retour aux applications	20
3.2.1	Gradients faibles et sauts généralisés	21
3.2.2	Théorèmes d'injection pour \mathcal{H}	22
3.3	Produit scalaire explicite dans \mathcal{H}	25
3.4	Résumé des résultats du chapitre	26
4	Problème à interface fractale	27
4.1	Formulation faible à échelle finie sur les espaces \mathcal{H}_k	27
4.2	Formulation faible sur l'espace asymptotique fractal \mathcal{H}	28
4.3	Convergence des solutions à échelle finie vers la solution fractale	30
4.4	Détermination de la formulation forte	31
II	Développement des outils	34
5	Éléments finis classiques sur des échelles finies	35
5.1	Notations et hypothèses	35
5.2	Formulation variationnelle discrète	37
6	Construction d'opérateurs de projection $\Pi_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k$	39
6.1	Inégalités locales de type Poincaré	39
6.2	Théorèmes de trace	48
6.3	Projections sur les espaces k -échelles \mathcal{H}_k	48
6.4	Opérateur de quasi-interpolation $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$	57

6.5	Opérateur final $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k}$	60
III Méthodes d’homogénéisation numérique		62
7	La méthode LOD, une méthode d’éléments finis multi-échelles	63
7.1	Un mot sur les méthodes d’éléments finis multi-échelles (EFMe) [Alo, sec. 6.3]	63
7.2	Description de la méthode avec les mains	63
7.3	Description théorique de la méthode	64
7.3.1	Pourquoi orthogonaliser la décomposition naïve?	64
7.3.2	Décomposition a -orthogonale	66
7.4	Nécessité d’une approximation locale du correcteur haute fréquence	70
7.5	Construction d’une approximation locale du correcteur haute fréquence grâce à une <i>cell-based subspace correction</i>	70
7.6	Calcul pratique d’une base de $\mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}$ [KPY22, p.1475]	75
8	Iterative subspace correction	76
8.1	Cell-based subspace decomposition	76
8.2	Sequential subspace correction	77
9	Expériences numériques	80
9.1	Réseau d’interfaces fractal fortement localisé	80
9.2	Réseau d’interfaces d’inspiration géologique	81
IV Annexes		84
A	Mesure de Lebesgue, ensembles non-mesurables, mesures de Hausdorff [Bon]	85
B	Espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ [DD07, p.194]	88
C	Démonstration de l’inégalité de Poincaré–Wirtinger	90
D	Construction du complété d’un EVN à l’aide de classes de suites de Cauchy [BBH21]	92
E	Divers	94
E.1	Intégrale de surface [BBH21, p.40]	94
E.2	Formule des sauts [BBH21, p.56]	95
E.3	Formule de Green avec saut	95
E.4	Interfaces and jumps	95
E.5	Première forme fondamentale & Calcul de la longueur d’un arc tracé sur une surface [Buso4]	96
E.6	Théorème du graphe fermé [JZ21]	97
E.7	Théorème de trace	97
E.8	Le théorème de projection [BBH21]	98

Table des figures

2.1	Illustration des définitions des rayons r_G et R_G et du critère de régularité 2.5	10
2.2	Réseau d'interfaces fractal fortement localisé $\Gamma^{(k)}$ pour $k = 1, 2, 3$	11
2.3	Exemples de réseaux d'interfaces fractals en 3D	11
2.4	Illustration des ensembles $\Omega_\infty^{(k)}$ et $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ et du coefficient C_{k+1} pour $k = 1, 2$	12
2.5	Illustrations des définitions de la section 2.4	13
4.1	Passage à la limite de la formulation faible k -échelle	29
5.1	Régularité des maillages $\mathcal{T}^{(k)}$	36
5.2	Fonction de base $\lambda_p^{(k)} \in \mathbb{P}_1$ pour $k = 1$	36
5.3	Illustration des maillages pour $k = 1, 2$	37
6.1	Diagramme de la démonstration de l'inégalité locale de type Poincaré sur $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$	40
6.2	Stratégie pour l'élaboration d'une inégalité locale de type Poincaré	40
6.3	Stratégie pour l'élaboration d'une inégalité locale de type Poincaré (bis)	41
6.4	Illustration de la démonstration du lemme 6.5	44
6.5	Illustration de la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ en dimension 1	51
6.6	Illustration du contre-exemple	56
6.7	Fonction H^1 discontinue en un point	57
7.1	Raffinement d'une maille dans le cadre d'une méthode d'éléments finis multi-échelles	63
7.2	Illustration de la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{S}_k \oplus \mathcal{V}_k$	64
7.3	Construction géométrique de $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$	67
7.4	Représentation de la décomposition a -orthogonale	68
7.5	À gauche : fonction de base nodale . À droite : fonction de base modifiée [AH15]	69
7.6	Calcul géométrique du facteur de relaxation optimal ω_{opt}	75
8.1	Patch de rayon 1	76
9.1	Réseau d'interfaces d'inspiration géologique en dimension d'espace $d = 2$: $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1$ (rouge) et $\Gamma^{(k)}$ avec Γ_k (rouge) pour $k = 3, 5, 6$ [KPY22, Fig. 2].	81
D.1	Diagramme des espaces dans la construction du complété d'un EVN	93

Chapitre 1

Introduction

1.1 Description du problème & Objectif général

L'objet de ce rapport est l'étude des problèmes de la forme

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{R} \text{ tel que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma \\ \text{conditions de saut} & \text{sur } \Gamma \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. , \end{aligned} \quad (1.1)$$

où l'espace \mathcal{H} est à bien définir, où $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ est un domaine borné à frontière lipschitzienne et où le réseau d'interfaces Γ est fractal. L'existence d'échelles spatiales très variées dans le réseau d'interfaces signifie que le coefficient A oscille sur une échelle spatiale de taille très petite par rapport à la taille du domaine macroscopique Ω .

Objectif général. Compréhension approfondie et détaillée d'une classe de problèmes d'interface fractale scalaire et elliptique augmentée par des sauts linéaires entre les interfaces et la construction de solveurs algébriques robustes, efficaces et indépendants de l'échelle.

1.2 Motivations

Dans cette étude, nous considérons des **problèmes elliptiques d'interface multi-échelles**

sans séparation d'échelles spatiales
dans une géométrie non périodique.

La «séparation d'échelles spatiales» signifie que les problèmes homogénéisés, dans la limite asymptotique $\varepsilon \rightarrow 0$, se découpent généralement en un problème global qui décrit le comportement du système observé macroscopiquement, et un ou plusieurs problèmes locaux qui capturent le comportement oscillatoire [HKP19, p. 2].

Ce cadre est motivé par la géologie. En effet, des études expérimentales suggèrent que les grains dans les roches fracturées sont **distribués** de manière **fractale** (cf. références dans [HKP19, p.2]).



1.3 Pourquoi les éléments finis classiques ne sont pas adaptés? [MP13, Sec. 2.1]

En supposant que la solution u du problème type 1.1 est **suffisamment régulière**, on obtient l'estimation d'erreur *a priori* classique [CLog, Théo. 2.4]

$$\|u - u_h\| \leq Ch \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}. \quad (1.2)$$

Cette estimation établit une vitesse de convergence d'ordre 1 pour la méthode des éléments finis classique. Cependant, **l'hypothèse de régularité de la solution n'est pas réaliste** pour le problème que nous considérons. De plus, même si le coefficient était régulier, il pourrait osciller très rapidement, disons à la fréquence ε^{-1} pour un paramètre ε très petit. Dans ce cas, **l'estimation 1.2 est inutile** car $\nabla^2 u$ pourrait également osciller à la même échelle, ce qui signifierait que $\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)} \approx \varepsilon^{-2}$. Donc à moins que $h \lesssim \varepsilon$, **l'espace d'éléments finis V_h ne permet pas de saisir le comportement de la solution** que ce soit à l'échelle microscopique ou macroscopique.

Remarque 1.1. Dans des applications pratiques, le pas de maillage h est déterminé par la **précision de calcul désirée** ou bien par les **ressources de calcul disponibles** mais *non* par l'échelle d'oscillation des coefficients.

1.4 Objectifs plus précis

- (i) Nous cherchons à nous placer dans le **cadre d'application de la méthode LOD**, présentée entre autre dans l'article [MP13]. Cette méthode d'éléments finis généralisés, fondée sur la construction de fonctions de base adaptées, permet de montrer que l'erreur $u - u_{h,k}^{\text{ms}}$ vérifie l'estimation

$$\|u - u_{h,k}^{\text{ms}}\| \leq Ch,$$

pour une norme $\|\cdot\|$ bien choisie et où C ne dépend que des données du problème et de h , le pas d'un maillage grossier et où $k \approx \log(1/h)$ correspond au nombre de couches d'éléments grossiers qui forment le support des fonctions de base localisées.

- (ii) Cette estimation montre que cette méthode est **robuste à l'absence d'hypothèses fortes**, comme la périodicité et la séparation d'échelles [MP13, Sec. 1].
- (iii) L'outil clé de cette méthode et le résultat principal de ce rapport est la construction d'un opérateur d'interpolation $\boxed{\Pi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}}$ [MP13, Sec. 2.2, p.3] vérifiant les propriétés de stabilité et d'approximation suivantes

$$\|\Pi v\|_{\mathcal{H}} \leq c \|v\|_{\mathcal{H}}, \quad \|v - \Pi v\|_{L^2} \leq Ch \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (1.3)$$

pour l'espace \mathcal{S} des éléments finis \mathbb{P}_1 sur un maillage adapté au réseau Γ dans un sens que nous préciserons dans la section 5.1.

Convention. Pour faciliter la retranscription des expressions écrites dans les articles étudiés, nous adoptons leur convention selon laquelle $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Notation. Pour désigner un intervalle ouvert, nous utiliserons indifféremment la notation $]x; y[$ ou (x, y) .

Première partie

Définition et construction rigoureuse du problème

Résumé

Construction d'un espace fonctionnel fractal de Hilbert sur $\Omega \setminus \Gamma$ par approximation de fonctions définies sur $\Omega \setminus \Gamma^{(k)}$:

- (i) Définition d'un espace fonctionnel naturel $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$
- (ii) Le munir d'un produit scalaire et d'une norme associée $\|\cdot\|_k$
- (iii) Définition des espaces de Hilbert k -échelle $\mathcal{H}_k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_k}$
- (iv) Construction de l'espace fractal limite \mathcal{H} par complétion $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_k$ avec les classes de suites de Cauchy
- (v) Construction et justification d'un produit scalaire et d'une norme pour l'espace \mathcal{H}
- (vi) Démonstration de l'inclusion $\mathcal{H} \subset \bigcap_{s \in [0; \frac{1}{2}[} H^s(\Omega)$

Nous allons montrer en utilisant des outils classiques pour les problèmes elliptiques qu'un problème k -échelle admet une unique solution $u_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. L'objectif est de comprendre le comportement asymptotique de u_k lorsque $k \rightarrow \infty$. Les méthodes classiques d'homogénéisation ne suffisent plus, ce qui nous amène à développer le nouveau concept d'*homogénéisation fractal*.

Chapitre 2

Notations et définitions

2.1 Définition formelle d'un réseau d'interfaces fractal

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ un domaine borné à frontière lipschitzienne contenant un ensemble dénombrable d'interfaces Γ_j , $j \in \mathbf{N}$ deux à deux disjointes. Nous supposons que chaque interface est affine par morceaux et de dimension $d-1$. Considérons le réseaux d'interfaces d'ordre k , noté $\Gamma^{(k)}$ et sa limite fractale notée Γ , définies respectivement par

$$\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j, \quad k \in \mathbf{N}, \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j. \quad (2.1)$$

Plus précisément, $\Gamma^{(k)}$ est l'ensemble de toutes les interfaces à l'itération k et Γ_k est l'ensemble des nouvelles interfaces créées lors de l'itération k . Étant donné que les interfaces $(\Gamma_j)_{j \in \mathbf{N}}$ sont de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d , leur union dénombrable Γ est également de mesure de Lebesgue nulle. Cependant, il est possible que Γ ait une dimension fractale (de Hausdorff) $d - s$ pour un certain $s \in]0; 1[$ et une mesure $(d-1)$ -dimensionnelle de valeur infinie.

Mettons en avant la remarque suivante, qui nous sera utile ultérieurement.

Remarque 2.1. Étant donné que pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'interface Γ_k est de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d , leur union dénombrable Γ est également de mesure de Lebesgue nulle.

Pour $k \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\Omega \setminus \Gamma^{(k)}$ correspond à un nombre fini de cellules $G \in \Omega^{(k)}$, deux à deux disjointes, ouvertes et simplement connexes, *i.e.*

$$\Omega \setminus \Gamma^{(k)} = \bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} G. \quad (2.2)$$

Nous supposons que $\partial G = \partial \overline{G}$, *i.e.* G est sans fissures, et que soit $G \cap \partial \Omega$ a une mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle positive ou bien $G \cap \partial \Omega = \emptyset$. De plus, nous supposons que les cellules $G \in \Omega^{(k)}$ sont des domaines étoilés, dans le sens où pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, il y a un centre $p_G \in G$ de G et une fonction continue ρ_G définie sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} de \mathbf{R}^d à valeurs dans \mathbf{R}_+ , telle que

$$G = \{p_G + rs \mid s \in \mathbb{S}^{d-1}, 0 \leq r \leq \rho_G(s)\}. \quad (2.3)$$

On note

$$R_G = \max_{s \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho_G(s), \quad r_G = \min_{s \in \mathbb{S}^{d-1}} \rho_G(s). \quad (2.4)$$

Remarque 2.2. Le centre p_G et donc les rayons R_G et r_G d'une cellule G ne sont pas uniques en général.

De plus, nous supposons que les partitions $\Omega^{(k)}$ pour $k \in \mathbf{N}$ sont de *forme régulière* dans le sens où il existe une constante $\gamma \geq 1$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\frac{R_G}{r_G} \leq \gamma \quad \forall G \in \Omega^{(k)}. \quad (2.5)$$

Remarque 2.3. La condition de régularité 2.5 des partitions $\Omega^{(k)}$ signifie que l'on exclut des cellules de forme « trop étoilée » comme l'illustre la figure 2.1.

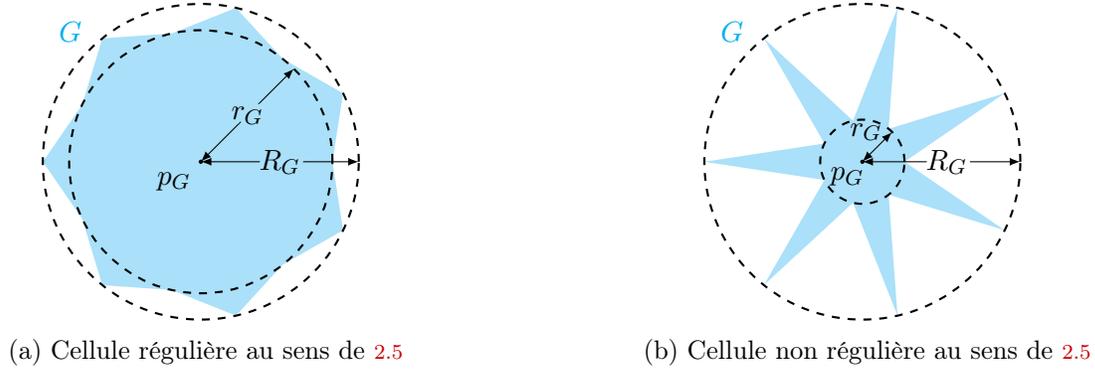


FIGURE 2.1 – Illustration des définitions des rayons r_G et R_G et du critère de régularité 2.5

Nous définissons le sous-ensemble des *cellules invariantes* par

$$\Omega_\infty^{(k)} = \{G \in \Omega^{(k)} \mid G \in \Omega^{(j)} \quad \forall j > k\} \quad (2.6)$$

c'est-à-dire l'ensemble des cellules de la partition $\Omega^{(k)}$ qui ne sont pas subdivisées aux itérations $j > k$. Ceci permet de définir la *taille maximale*

$$d_k = 2 \max\{R_G \mid G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}\} \quad (2.7)$$

des cellules $G \in \Omega^{(k)}$ qui sont subdivisées aux itérations $j > k$. Ainsi, $R_G \leq d_k$ pour tout $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. On remarque que d_k décroît avec $k \in \mathbf{N}$ et nous supposons que

$$d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.8)$$

Soit $|M| \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ le cardinal de l'ensemble M . Nous supposons que pour $k \in \mathbf{N}$ et pour $j > k$,

$$C_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{G \in \Omega^{(k)}} \sup_{x,y \in \Omega} \text{ess} |(x,y) \cap G \cap \Gamma_j| < +\infty. \quad (2.9)$$

Remarque 2.4. Les $C_{k,j}$ sont des entiers.

On pose

$$C_1 = 1, C_j = C_{1,j}, j = 2, \dots \quad (2.10)$$

et

$$r_k = \sup_{j > k} \frac{C_{k,j}}{C_j}, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (2.11)$$

Enfin nous supposons que

$$r_k C_k \leq C_0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad (2.12)$$

est vérifiée pour une constante C_0 , ce qui est typiquement le cas des réseaux auto-similaires.

2.2 Interprétation du point de vue de la modélisation

Signification des coefficients C_k . La constante $C_k > 0$ est une constante géométrique correspondant au *taux de fracturation* du domaine Ω peuplé par le réseau d'interfaces Γ_k .

Les applications géologiques donnent lieu à des problèmes mécaniques sur de tels réseaux multi-échelles de failles. Le réseau de niveau k noté $\Gamma^{(k)} = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ est constitué de failles ordonnées par leur résistance, de « forte » à « faible », dans le sens où l'amplitude du déplacement cosismique le long de Γ_j devraient diminuer à mesure que j augmente, car les milieux « plus fracturées » devraient montrer une résistance plus élevée. [HKP19, p.2]

2.3 Exemple d'un réseau d'interfaces fractal fortement localisé

Plaçons-nous en dimension d'espace $d = 2$. Soient $\Omega =]0; 1[{}^2$ et $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de \mathbf{R}^2 . Les réseaux d'interfaces $\Gamma^{(k)}$ pour $k \in \mathbf{N}$ sont construits par récurrence de la manière suivante. Soit

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_1 = \left\{ \frac{1}{4}e_1 +]0; e_2[\right\} \cup \left\{ \frac{1}{4}e_2 +]0; e_1[\right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}e_1 +]0; \frac{1}{4}e_2[\right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}e_2 +]0; \frac{1}{4}e_1[\right\}.$$

Étant donné $\Gamma^{(k)}$ pour $k \geq 1$, on pose

$$\tilde{\Gamma}_{k+1} = \Gamma^{(k)} \cup \{e_1 + \Gamma^{(k)}\} \cup \{e_2 + \Gamma^{(k)}\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{k+1} = \frac{1}{4}\tilde{\Gamma}_{k+1} \setminus \Gamma^{(k)}.$$

Nous nous ramènerons fréquemment à cet exemple dans toute la suite du rapport.

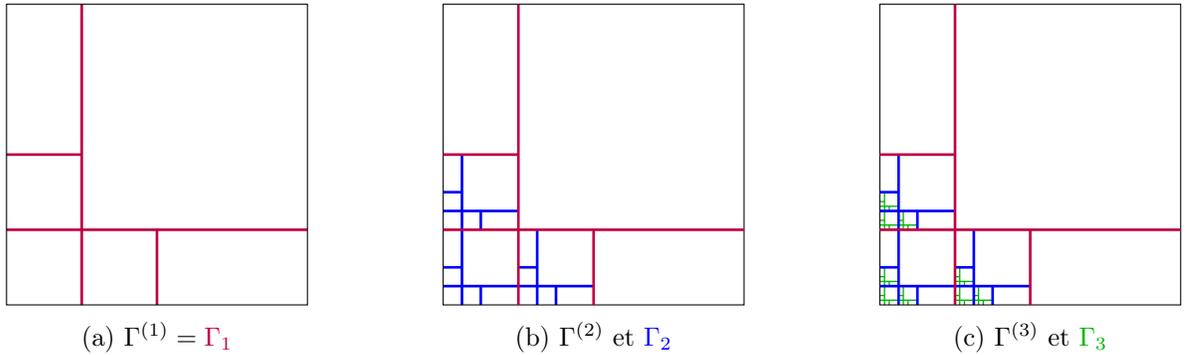


FIGURE 2.2 – Réseau d'interfaces fractal fortement localisé $\Gamma^{(k)}$ pour $k = 1, 2, 3$

Nous pouvons aisément étendre cette construction aux dimensions supérieures.

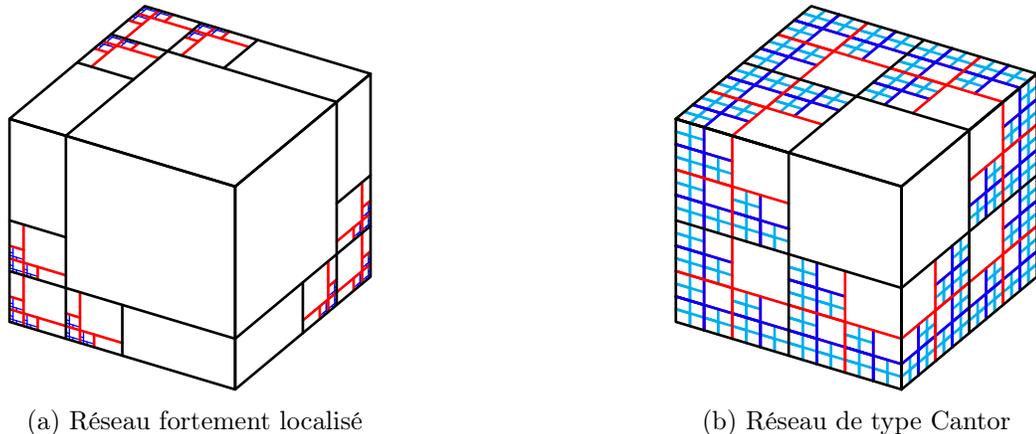


FIGURE 2.3 – Exemples de réseaux d'interfaces fractals en 3D

Remarque 2.5. Nous avons ainsi construit un **réseau autosimilaire**.

Nous pouvons également illustrer les ensembles $\Omega_\infty^{(k)}$ et $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ définis par 2.6 et 2.2 ainsi que le nombre C_k défini par 2.10 qui correspond au nombre de points verts sur la figure 2.4.

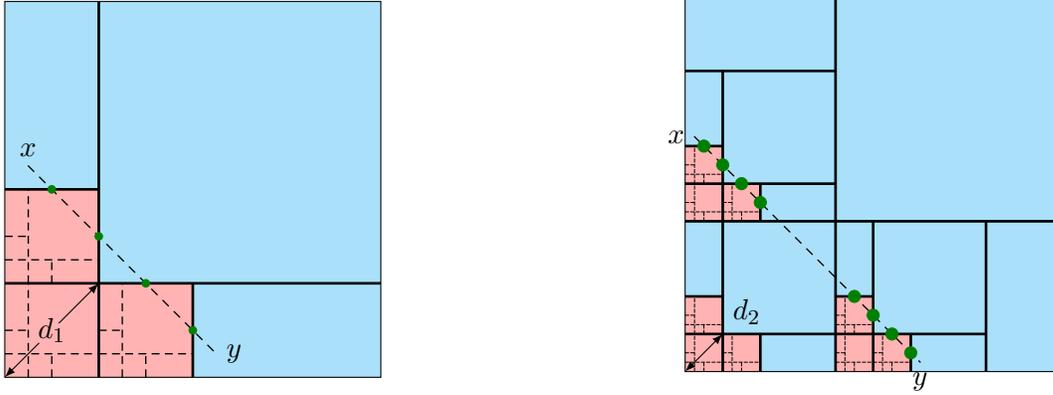


FIGURE 2.4 – Illustration des ensembles $\Omega_\infty^{(k)}$ et $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ et du coefficient C_{k+1} pour $k = 1, 2$

Proposition 2.1. Pour ce réseau d'interfaces fractal, on a

$$d_k = \sqrt{2} \cdot 4^{-k}, \quad C_k = 2^k, \quad r_k = 2^{1-k},$$

où d_k , C_k et r_k sont définis respectivement par 2.7, 2.10 et 2.11.

Remarque 2.6. L'hypothèse 2.8 de décroissance de $(d_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vers 0 est bien vérifiée et l'hypothèse 2.12 est vérifiée pour $C_0 = 2$.

2.4 Espaces fonctionnels fractals

Introduisons une première famille d'espaces.

Définition 2.1. Pour $k \in \mathbf{N}$, l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux sur les cellules du pavage $\Omega^{(k)}$ est défini par

$$\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega) = \left\{ v : \bar{\Omega} \setminus \Gamma^{(k)} \rightarrow \mathbf{R} \mid v|_G \in \mathcal{C}^1(\bar{G}) \quad \forall G \in \Omega^{(k)} \text{ et } v|_{\partial\Omega} \equiv 0 \right\}. \quad (2.13)$$

Remarques 2.1.

- (i) Une première remarque est que la trace de toute fonction $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ est bien définie au bord de toute les cellules $G \in \Omega^{(k)}$ (cf. annexe E.7).
- (ii) Une deuxième remarque est que les espaces $(\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega))_{k \in \mathbf{N}}$ sont emboîtés, i.e.

$$\mathcal{C}_{0,0}^1(\Omega) \subset \mathcal{C}_{1,0}^1(\Omega) \subset \mathcal{C}_{2,0}^1(\Omega) \subset \cdots \subset \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega), \quad k \in \mathbf{N}.$$

En effet, soient $\ell \in \mathbf{N}$, une fonction $v \in \mathcal{C}_{\ell,0}^1(\Omega)$ et une cellule $G \in \Omega^{(j)} \setminus \Omega_\infty^{(j)}$ avec $j > \ell$. Comme, par construction, la suite des réseaux d'interfaces $(\Gamma^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante (cf. 2.1), il existe une cellule $G' \in \Omega^{(\ell)}$ telle que $G \subset G'$. Or $v|_{G'} \in \mathcal{C}^1(\bar{G}')$ et donc $v|_G \in \mathcal{C}^1(\bar{G})$.

Nous illustrons sur la figure 2.5a l'exemple d'une fonction $v \in \mathcal{C}_{1,0}^1(\Omega)$.

Toute la difficulté du problème est la prise en compte des sauts au passage des interfaces. Définissons le vecteur normal sortant à une interface.

Définition 2.2 (Vecteur normal sortant à une interface). Soit $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Comme Γ_j est affine par morceaux, il existe un *vecteur normal* ν_ξ à Γ_j en presque tout $\xi \in \Gamma_j$. On choisit ce vecteur sortant, i.e. $\nu_\xi \cdot e_m > 0$ avec $m = \min\{i \in \llbracket 1; d \rrbracket \mid \nu_\xi \cdot e_i \neq 0\}$ où $\{e_1, \dots, e_d\}$ est la base canonique de \mathbf{R}^d .

On peut alors définir le saut d'une fonction au travers d'une interface.

Définition 2.3 (Saut). Soit $\xi \in \mathbf{R}^d$ tel que le vecteur normal sortant ν_ξ est bien défini et soient $x \neq y \in \mathbf{R}^d$ tels que $(x - y) \cdot \nu_\xi \neq 0$. Le *saut* d'une fonction $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ au travers de l'interface Γ_j au point ξ dans la direction $y - x$ est défini par

$$[[v]]_{x,y}(\xi) = \lim_{s \downarrow 0} [v(\xi + s(y - x)) - v(\xi - s(y - x))].$$

Au signe près, $[[v]]_{x,y}(\xi)$ est égal au saut de $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ dans la direction normale

$$[[v]](\xi) \stackrel{\text{def}}{=} [[v]]_{\xi - \nu_\xi, \xi + \nu_\xi}(\xi).$$

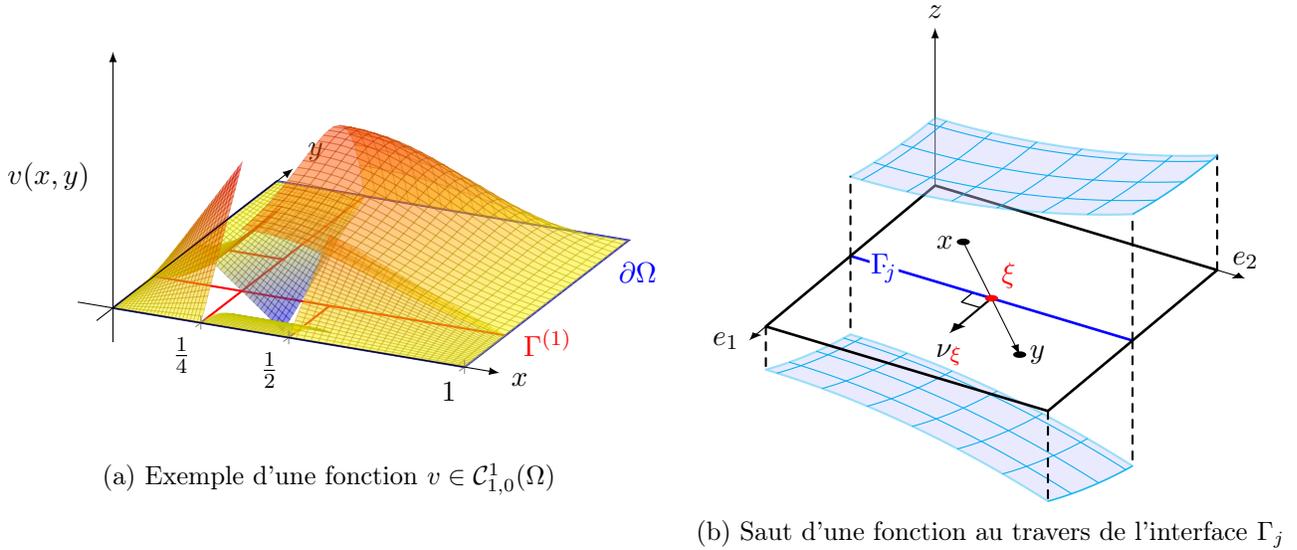


FIGURE 2.5 – Illustrations des définitions de la section 2.4

Ceci nous permet d'introduire la produire scalaire suivant sur $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$.

Définition 2.4 (Produit scalaire et norme sur $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$). Soient $c > 0$ une constante et les constantes géométriques $(C_j)_{j \in \mathbf{N}}$ définies par 2.10, on définit le produit scalaire suivant

$$\langle v, w \rangle_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \sum_{j=1}^k (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} [[v]] [[w]] \, d\Gamma_j, \quad v, w \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega), \quad (2.14)$$

avec la norme associée $\|v\|_k \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, v \rangle_k^{1/2}$.

Interprétation du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$. L'ordonnancement des interfaces Γ_k de « solide » à « fragile » est modélisé en multipliant les contributions des sauts au travers des interfaces Γ_k par un poids exponentiel

$C_k(1+c)^k$. Ici, $C_k > 0$ est une constante géométrique correspondant à la *vitesse de fracturation* pour chaque k . La constante $c > 0$ est une *constante de matériau* qui détermine la croissance de la résistance aux sauts avec l'augmentation de la fracturation.

■ **Démonstration** ($\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$). La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ est bien symétrique, bilinéaire et positive. Montrons qu'elle est définie positive : soit $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ tel que $\langle v, v \rangle_k = 0$. Alors, les deux termes du produit scalaire étant positifs, ils sont nécessairement nuls, *i.e.*

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} |\nabla v|^2 dx = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j = 0 \implies \llbracket v \rrbracket(\Gamma_j) = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1; k \rrbracket.$$

La première égalité entraîne que la fonction v est constante par morceaux sur les cellules $G \in \Omega^{(k)}$ et la deuxième égalité entraîne que v est constante sur $\Omega \setminus \Gamma^{(k)}$. Finalement, comme $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$, cette constante est nulle et $v \equiv 0$. \square

Remarques 2.2.

- (i) La norme $\|\cdot\|_k$ est défini comme la somme de la semi-norme H^1 brisée et des normes L^2 pondérées des sauts au travers des interfaces Γ_j pour $j = 1, \dots, k$.
- (ii) Le facteur $(1+c)^j$ modélise la résistance exponentielle aux sauts à travers Γ_j lorsque j augmente.

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ introduit dans le définition 2.4 permet de définir les espaces de Hilbert k -échelle \mathcal{H}_k de la manière suivante.

Définition 2.5 (Espace de Hilbert k -échelle). Pour $k \in \mathbf{N}$, l'espace fonctionnel k -échelle \mathcal{H}_k est défini comme la fermeture de $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_k$:

$$\mathcal{H}_k \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_k}.$$

L'espace \mathcal{H}_k est donc un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_k$.

Remarque 2.7. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'espace de Hilbert \mathcal{H}_k est topologiquement équivalent à l'espace de Sobolev brisé $H^1(\Omega, \Omega^{(k)})$ muni de la norme de Sobolev brisée classique, défini dans [Voh, Sec. o.6].

Une première propriété des espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est qu'ils héritent du caractère emboîté des espaces $(\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)_k)_{k \in \mathbf{N}}$ (cf. 2.1).

Proposition 2.2. Les espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont emboîtés

$$\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots \subset \mathcal{H}_k, \quad k \in \mathbf{N},$$

et ces inclusions sont isométriques.

■ **Démonstration.**

- (i) Montrons dans un premier temps que pour $v \in \mathcal{H}_k$ et $p \in \mathbf{N}$, on a $\|v\|_k = \|v\|_{k+p}$. D'après la définition 2.4,

$$\|v\|_{k+p} = \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k+p)}} |\nabla v|^2 dx + \sum_{j=1}^{k+p} (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j.$$

Or, comme $v \in \mathcal{H}_k$, pour tout $j > k$, le saut $\llbracket v \rrbracket(\Gamma_j)$ est nul puisque les interfaces Γ_j sont une subdivision de cellules sur lesquelles v est continue. De plus, d'après la remarque 2.1, les interfaces $\Gamma_j^{(j)}$ pour $j \in \mathbf{N}$ sont de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d , donc $\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k+p)}} |\nabla v|^2 dx = \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} |\nabla v|^2 dx$, ce qui montre le résultat.

- (ii) Montrons que les espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont emboîtés. Soit $k \in \mathbf{N}$, d'après la remarque item (ii) et la définition 2.5,

$$\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega) \subset \mathcal{C}_{k+1,0}^1(\Omega) \subset \overline{\mathcal{C}_{k+1,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k+1}} = \mathcal{H}_{k+1}. \quad (2.15)$$

Or, d'après le premier point,

$$\overline{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_k} = \overline{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k+1}},$$

et comme \mathcal{H}_{k+1} est fermé, on déduit de 2.15 que $\overline{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_k} = \mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k+1}$.

□

Chapitre 3

Construction d'un espace fractal asymptotique complet

Le but de cette section est de **formuler un problème** elliptique scalaire sur la **géométrie fractale** $\Omega \setminus \Gamma$, dont la solution autorise des sauts à travers le réseau d'interfaces fractales Γ . Cependant, la nature fractale de la géométrie constitue un cadre difficile pour lequel des notions mathématiques appropriées doivent être développés. Les questions naturelles qui se posent sont :

- Quel est un espace de solutions approprié ?
- Existe-t-il des notions de base comme les *gradients faibles* ou les *sauts* à travers les interfaces ?

Pour répondre à ces questions, nous suivons une stratégie très courante en analyse fonctionnelle, la construction du complété d'un EVN à l'aide de classes de suites de Cauchy [Pod22, Sec. 3.1.2, p.49]. L'annexe D présente une démonstration générale du fait qu'il est toujours possible de compléter tout espace vectoriel normé incomplet.

Objectifs. La structure hiérarchique des réseaux d'interfaces $\Gamma^{(k)}$ nous a permis de construire des espaces emboîtés \mathcal{H}_k . L'objectif est maintenant la construction d'un espace fractal asymptotique \mathcal{H} , par complétion de l'union des espaces k -échelle \mathcal{H}_k pour $k \in \mathbf{N}$. Nous démontrons également les injections continues $\mathcal{H} \subset L^2$ et $\mathcal{H} \subset H^s$ pour $0 < s < \frac{1}{2}$ et la caractérisation du produit scalaire de \mathcal{H} en termes de gradients faibles et de sauts généralisés.

Dans la section suivante, nous nous détachons des espaces \mathcal{H}_k définis précédemment et démontrons un résultat général de complétion de l'union d'une famille particulière d'espaces complets.

3.1 Construction abstraite

Hypothèses. On considère la famille d'espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que pour $k \in \mathbf{N}$,

- l'espace \mathcal{H}_k est fermé, non vide et complet pour la norme $\|\cdot\|_k$ issue du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$;
- les espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont emboîtés, *i.e.* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \dots \subset \mathcal{H}_j$;
- ces inclusions sont isométriques, *i.e.* pour $v \in \mathcal{H}_k$, $\|v\|_k = \|v\|_{k+1} = \dots = \|v\|_{k+p}$, pour $p \in \mathbf{N}$.

Définition 3.1. Soit \mathcal{H}_∞ l'espace défini par

$$\mathcal{H}_\infty = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_k.$$

Définition 3.2. On note $\sigma: \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathbf{N}$ la fonction qui à un élément $v \in \mathcal{H}_\infty$ associe le plus petit entier $\sigma(v)$ tel que $v \in \mathcal{H}_{\sigma(v)}$.

Proposition 3.1 (Produit scalaire sur \mathcal{H}_∞). On peut munir \mathcal{H}_∞ du produit scalaire

$$\langle v, w \rangle_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, w \rangle_{\max\{\sigma(v), \sigma(w)\}} \quad v, w \in \mathcal{H}_\infty$$

de norme associée $\|\cdot\|_\infty = \langle \cdot, \cdot \rangle_\infty^{1/2}$.

■ **Démonstration.** Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ vérifie les propriétés d'un produit scalaire. Soient $u, v, w \in \mathcal{H}_\infty$ et supposons sans perte de généralité que $\sigma(u) \leq \sigma(v) \leq \sigma(w)$. Ainsi,

$$\langle v + u, w \rangle_\infty = \langle v + u, w \rangle_{\sigma(w)}.$$

Or, par hypothèse, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\sigma(w)}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}_{\sigma(w)}$. On en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ vérifie toutes les propriétés suivantes d'un produit scalaire :

- Symétrie : $\langle v, w \rangle_\infty = \langle w, v \rangle_\infty$;
- Linéarité : pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\langle v + \lambda u, w \rangle_\infty = \langle v, w \rangle_\infty + \lambda \langle u, w \rangle_\infty$;
- Positivité : $\langle v, v \rangle_\infty \geq 0$;
- Définition : $\langle v, v \rangle_\infty = 0 \iff v = 0$.

□

L'annexe D présente une démonstration générale du fait qu'il est toujours possible de compléter tout espace vectoriel normé incomplet. Nous explicitons ici cette construction pour la complétion de \mathcal{H}_∞ .

Définition 3.3 (Espace fractal asymptotique \mathcal{H}). On définit l'espace fractal \mathcal{H} comme l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy de \mathcal{H}_∞ par la relation d'équivalence : pour $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ deux suites de Cauchy de \mathcal{H}_∞ ,

$$(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \sim (w_k)_{k \in \mathbf{N}} \iff \|v_k - w_k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

On dit que l'espace \mathcal{H} est l'espace quotient de \mathcal{H}_∞ par la relation d'équivalence \sim .

Proposition 3.2. Pour toute suite de Cauchy dans \mathcal{H}_∞ , il existe une suite de Cauchy équivalente $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ dans \mathcal{H}_∞ telle que $v_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

■ **Démonstration.** Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathcal{H}_\infty)^\mathbf{N}$ une suite de Cauchy. On est nécessairement dans l'un des deux cas suivants :

(i) Cas où $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est telle que

$$\exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \sigma(u_n) \leq n.$$

Il suffit alors de choisir un élément $w_0 \in \mathcal{H}_0$ et de considérer la suite définie par

$$v_n = \begin{cases} w_0 & \text{si } n < N \\ u_n & \text{si } n \geq N \end{cases}. \quad (3.1)$$

En effet, pour tout $n < N$, $v_n \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_n$ et pour $n \geq N$, $v_n \in \mathcal{H}_{\sigma(u_n)} \subset \mathcal{H}_n$. De plus, pour tout $n \geq N$, on a $\|u_n - v_n\|_n = 0$ et donc les suites $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont équivalentes.

(ii) Cas où $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \exists n \geq N, \quad \sigma(u_n) > n.$$

Soit $k \in \mathbf{N}$, l'espace \mathcal{H}_k étant fermé et non vide, on peut donc considérer la projection $P_k: \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_\infty$ caractérisée par

$$\forall u \in \mathcal{H}_\infty, \quad P_k u \in \mathcal{H}_k \quad \text{et} \quad \langle u - P_k u, w \rangle_\infty = 0, \quad \forall w \in \mathcal{H}_k.$$

De plus, la projection P_k est telle que

$$\forall v \in \mathcal{H}_k, \quad \|u_k - v_k\|_\infty \leq \|u_k - v\|_\infty. \quad (3.2)$$

Montrons que la suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie par

$$v_k = P_k u_k, \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

est équivalente à la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$, à savoir que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_\varepsilon \in \mathbf{N} \quad \text{tel que} \quad \forall k \geq K_\varepsilon, \quad \|u_k - v_k\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy donc il existe un rang $N^\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geq N^\varepsilon, \quad \|u_n - u_m\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (3.3)$$

Par hypothèse, il existe $n_{N^\varepsilon} \geq N^\varepsilon$ tel que $n_{N^\varepsilon} < \sigma(u_{n_{N^\varepsilon}}) \stackrel{\text{def}}{=} K_\varepsilon$. Ainsi par 3.3 et par la propriété de la projection 3.2,

$$\forall k \geq K_\varepsilon \geq N^\varepsilon, \quad u_{n_{N^\varepsilon}} \in \mathcal{H}_k \quad \text{et} \quad \|u_k - v_k\|_\infty \leq \|u_k - u_{n_{N^\varepsilon}}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Nous venons ainsi de montrer que dans les deux cas, il existe une suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\|u_k - v_k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{i.e.} \quad (v_k)_{k \in \mathbf{N}} \sim (u_k)_{k \in \mathbf{N}}.$$

De plus, on en déduit que la suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy car, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|v_n - v_m\|_\infty \leq \|v_n - u_n\|_\infty + \|v_m - u_m\|_\infty + \|u_n - u_m\|_\infty.$$

□

Dans la suite, nous utiliserons toujours un tel représentant des éléments de \mathcal{H} . Plus précisément, pour $u \in \mathcal{H}$, une classe d'équivalence de suites de Cauchy de \mathcal{H}_∞ , nous choisissons comme représentant de cette classe une suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que $v_k \in \mathcal{H}_k$ pour $k \in \mathbf{N}$. Ce choix permet d'écrire, pour $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ deux suites de Cauchy de \mathcal{H}_∞ , que $\langle v_k, w_k \rangle_\infty = \langle v_k, w_k \rangle_k$.

Abus de notation. Soit une classe $v \in \mathcal{H}$, nous noterons également par $v = (v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ un représentant de cette classe.

Proposition 3.3 (Produit scalaire sur \mathcal{H}). Soient $v = (v_k)_{k \in \mathbf{N}}, w = (w_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$. La quantité

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_\infty$$

définit une norme sur \mathcal{H} . De plus, cette norme est associée au produit scalaire

$$\langle v, w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, w_k \rangle_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, w_k \rangle_\infty \quad (3.4)$$

dans le sens où $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$.

■ **Démonstration.** Montrons d'abord que $\|\cdot\|$ définit bien une norme sur \mathcal{H} , puis que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur \mathcal{H} .

- (i) Soit $v = (v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$ choisi tel que $v_k \in \mathcal{H}_k$ pour $k \in \mathbf{N}$, ce qui est possible d'après la proposition 3.2. Puisque la suite v est de Cauchy, on a d'après l'inégalité triangulaire inversée,

$$\left| \|v_m\|_m - \|v_\ell\|_\ell \right| \leq \|v_m - v_\ell\|_\ell, \quad \text{pour } \ell \geq m,$$

ce qui signifie que la suite $(\|v_k\|_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans \mathbf{R} et donc que sa limite

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_k$$

est bien définie. De plus, cette quantité ne dépend pas du représentant $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ choisi dans la classe. En effet, par l'inégalité triangulaire inversée, $\lim \|v_k\|_k = \lim \|u_k\|_k$ dès que $\lim \|v_k - u_k\|_k = 0$.

Montrons que $\|\cdot\|$ définit une norme sur \mathcal{H} :

- soit $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda v_k\|_k = |\lambda| \|v_k\|_k$, puis on passe à la limite ;
 - soient (v_k) et (w_k) deux suites de \mathcal{H} , $\|v_k + w_k\|_k \leq \|v_k\|_k + \|w_k\|_k$, puis on passe à la limite ;
 - soit $v \in \mathcal{H}$ tel que $\|v\| = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_k\|_k = 0$ soit $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est équivalente à la suite nulle donc $v = 0$.
- (ii) Nous pouvons maintenant montrer que 3.4 définit un produit scalaire sur \mathcal{H} par passage à la limite dans l'identité de polarisation

$$\langle v_k, w_k \rangle_k = \frac{1}{4} (\|v_k + w_k\|_k^2 - \|v_k - w_k\|_k^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) \stackrel{\text{def}}{=} \langle v, w \rangle. \quad (3.5)$$

Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire :

- l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien symétrique et positive ;
- soit $v \in \mathcal{H}$ tel que $\langle v, v \rangle = 0$, donc tel que $\|v\| = 0$ par 3.5 ce qui équivaut à $v = 0$ car $\|\cdot\|$ est une norme ;
- soit $\lambda \in \mathbf{R}$, d'une part $\langle v_k + \lambda u_k, w_k \rangle_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v + \lambda u, w \rangle$ et d'autre part, comme $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ est un produit scalaire pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\langle v_k + \lambda u_k, w_k \rangle_k = \langle v_k, w_k \rangle_k + \lambda \langle u_k, w_k \rangle_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle v, w \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$. Ainsi, par unicité de la limite, $\langle v + \lambda u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \lambda \langle u, w \rangle$.

□

Nous allons maintenant montrer que \mathcal{H}_∞ s'identifie à un sous-espace dense de \mathcal{H} et que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est complet.

Proposition 3.4 (Identification de \mathcal{H}_∞ à un sous-espace de \mathcal{H}). Pour identifier \mathcal{H}_∞ à un sous-espace de \mathcal{H} , nous considérons l'application

$$\mathcal{H}_k \ni v_k \mapsto \tilde{v}_k = (v_{k,\ell})_{\ell \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H} \text{ avec } v_{k,\ell} = \begin{cases} w_0 & \text{si } \ell < k \\ v_k & \text{si } \ell \geq k \end{cases} \quad (3.6)$$

où $w_0 \in \mathcal{H}_0$.

■ **Démonstration.** La suite $(\tilde{v}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, en effet, pour tout $\ell, m \geq k$, on a $\|v_{k,\ell} - v_{k,m}\|_\infty = 0$. Ainsi, l'ensemble des classes d'équivalences de $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\tilde{v}_k \mid v_k \in \mathcal{H}_k\}$ est un sous-espace de \mathcal{H} et les \tilde{v}_k en sont des représentants tels que $v_{k,\ell} \in \mathcal{H}_\ell$ pour tout $\ell \in \mathbf{N}$. De plus, on a par construction

$$\|\tilde{v}_k\| = \|v_k\|_k \quad \forall v_k \in \mathcal{H}_k.$$

□

Désormais, nous identifions l'espace k -échelle \mathcal{H}_k à l'ensemble des suites de Cauchy $\{\tilde{v}_k \mid v_k \in \mathcal{H}_k\}$ définies par 3.6. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de densité suivant.

Proposition 3.5 (Résultat de densité). *L'espace $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \{\tilde{v}_k \mid v_k \in \mathcal{H}_k\}$ est dense dans \mathcal{H} , i.e. pour tout $w \in \mathcal{H}$,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{v_k \in \mathcal{H}_k} \|w - \tilde{v}_k\| = 0.$$

■ **Démonstration.** Soient $w \in \mathcal{H}$ et $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ un représentant de w choisi tel que $w_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, ce qui est possible d'après 3.2. Montrons que $(\tilde{w}_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\infty^{\mathbf{N}}$ est tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w - \tilde{w}_k\| = 0. \quad (3.7)$$

Autrement dit, nous voulons montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \quad k > N_\varepsilon \implies \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|w_\ell - w_k\|_\ell \leq \varepsilon.$$

Or, la suite $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ étant de Cauchy, il suffit, pour montrer cette assertion, de passer à la limite $\ell \rightarrow \infty$ dans la définition d'une suite de Cauchy. Ainsi, on a montré que

$$\inf_{v_k \in \mathcal{H}_k} \|w - \tilde{v}_k\| \leq \|w - \tilde{w}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

c'est-à-dire que $\widetilde{\mathcal{H}}_\infty$ est dense dans \mathcal{H} . □

■ **Remarque 3.1.** On dira plus simplement que la suite d'espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est dense dans \mathcal{H} .

Théorème 3.1. *L'espace $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est complet.*

■ **Démonstration.** Soit $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de \mathcal{H} . D'après le résultat de densité 3.5, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $v_k \in \mathcal{H}_k$ tel que $\|w_k - \tilde{v}_k\| \leq \frac{1}{k}$. Ainsi,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - \tilde{v}_k\| = 0. \quad (3.8)$$

La suite $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ étant de Cauchy, il s'ensuit que $(\tilde{v}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ l'est aussi puisque

$$\|\tilde{v}_m - \tilde{v}_n\| \leq \|\tilde{v}_m - w_m\| + \|w_m - w_n\| + \|w_n - \tilde{v}_n\|.$$

Et comme par construction, $\|\tilde{v}_k\| = \|v_k\|_k$, ceci signifie que (v_k) est de Cauchy dans \mathcal{H}_∞ . Notons $v \in \mathcal{H}$ un représentant de cette suite. Alors, $\|w_k - v\| \leq \|w_k - \tilde{v}_k\| + \|\tilde{v}_k - v\|$ et donc d'après 3.7 et 3.8, on conclut que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - v\| = 0. \quad \square$$

3.2 Retour aux applications

■ **Remarque 3.2.** Dans les démonstrations de la section précédente, nous faisons appel à deux reprises (en 3.1 et 3.6) à un élément $w_0 \in \mathcal{H}_0$. On remarque que si l'on considère \mathcal{H}_0 comme le complété de $\mathcal{C}_{0,0}^1(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_0$, on peut prendre $w_0 = 0$.

Corollaire 3.1 (de la proposition 3.5). *L'espace $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ est dense dans \mathcal{H} .*

■ **Démonstration.** L'espace $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ étant dense dans \mathcal{H}_k par construction, on en déduit que l'espace défini par $\mathcal{C}_{\infty,0}^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ est tel que $\widetilde{\mathcal{C}_{\infty,0}^1}$ dense dans \mathcal{H} . Par abus de langage, nous dirons plus simplement que $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ est dense dans \mathcal{H} . \square

Nous allons déterminer dans la suite une expression plus « intuitive » que 3.4 du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{H} et de sa norme associée. Naturellement, nous avons envie de passer à la limite dans l'expression 2.14 du produit scalaire sur \mathcal{H}_k , ce que nous allons faire grâce aux notions de *gradient faible* et de *saut généralisé* présentées dans la sous-section suivante.

3.2.1 Gradients faibles et sauts généralisés

Soient $v, w \in \mathcal{H}$, nous souhaitons passer à la limite $k \rightarrow \infty$ dans

$$\langle v, w \rangle_k = \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \sum_{j=1}^k (1 + \mathbf{c})^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket \, d\Gamma_j.$$

Ce passage à la limite fait apparaître la norme du gradient dans $L^2(\Omega \setminus \Gamma)$ ainsi que le saut au travers des interfaces Γ_j pour $j \in \mathbf{N}$ d'une fonction de \mathcal{H} . Nous démontrons dans cette sous-section que ces notions sont bien définies. Plus précisément, nous voulons montrer que pour une fonction $v \in \mathcal{H}$, les quantités $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}$ et $\llbracket v \rrbracket$ sont bien définies.

Proposition 3.6. *Soit $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$. Les suites $(\nabla v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(\llbracket v_k \rrbracket)_{k \in \mathbf{N}}$ sont de Cauchy respectivement dans $L^2(\Omega \setminus \Gamma)^d$ et dans la suite d'espaces $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$ muni de la norme pondérée*

$$\|Z\|_{\Gamma} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (1 + \mathbf{c})^j C_j \|z_j\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \right)^{1/2}, \quad Z = (z_j)_{j \in \mathbf{N}} \in (L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}. \quad (3.9)$$

De plus, les espaces $L^2(\Omega \setminus \Gamma)$ et $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$ muni de leur norme respective sont complets.

■ **Démonstration.**

- (i) Justifions que l'espace $L^2(\Omega \setminus \Gamma)$ est bien défini. Pour cela, remarquons que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Omega \setminus \Gamma \subset \Omega \setminus \Gamma^{(k)}$. En effet, comme $\Gamma^{(k)} \subset \Gamma$, en passant au complémentaire $\Gamma^{\complement} \subset (\Gamma^{(k)})^{\complement}$ et donc $\Omega \cap \Gamma^{\complement} \subset \Omega \cap (\Gamma^{(k)})^{\complement}$. L'ensemble $\Omega \setminus \Gamma^{(k)}$ étant mesurable au sens de Lebesgue, l'espace $L^2(\Omega \setminus \Gamma)$ est bien défini.
- (ii) L'application $\|\cdot\|_{\Gamma}$ définie par 3.9 est bien une norme sur l'espace $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$. Montrons que, muni de cette norme, cet espace est complet. Soit $(Z^k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$. Ceci signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{N}, \quad \forall n, m \geq K, \quad \|Z^n - Z^m\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon. \quad (3.10)$$

En particulier, pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{N}, \quad \forall n, m \geq K, \quad \|z_j^n - z_j^m\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie précisément que la suite à j fixé $(z_j^n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Gamma_j)$ qui est complet. Ladite suite converge donc dans $L^2(\Gamma_j)$ vers un élément z_j lorsque $n \rightarrow \infty$.

De 3.10, on déduit encore que pour N quelconque

$$\forall n, m \geq K, \quad \sum_{j=1}^N (1+c)^j C_j \|z_j^n - z_j^m\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui autorise le passage à la limite $n \rightarrow \infty$ et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{N}, \quad \forall n, m \geq K, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{j=1}^N (1+c)^j C_j \|z_j - z_j^m\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq \varepsilon.$$

Une suite réelle croissante majorée étant convergente, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{N}, \quad \forall m \geq K, \quad \sum_{j=1}^{\infty} (1+c)^j C_j \|z_j - z_j^m\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq \varepsilon.$$

Si on note $Z = (z_j)_{j \in \mathbf{N}}$ la suite formée par les $z_j \in L^2(\Gamma_j)$, on voit que pour $m \geq K$ la suite $Z - Z^m \in (L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$, ce qui avec $Z^m \in (L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$ implique que $Z \in (L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$. On a obtenu :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K \in \mathbf{N}, \quad \forall m \geq K, \quad \|Z - Z^m\|_{\Gamma}^2 \leq \varepsilon,$$

ce qui exprime exactement le fait que la suite $(Z^m)_{m \in \mathbf{N}}$ converge vers Z dans $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$.

(iii) De l'inclusion $\Omega \setminus \Gamma \subset \Omega \setminus \Gamma^{(k)}$, on déduit que $\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)} \leq \|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}$ et donc

$$\|\nabla v_k\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|[v_k]\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq \|v_k\|_k^2 \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, comme $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_k$, les suites $(\nabla v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $([v_k])_{k \in \mathbf{N}}$ le sont également, respectivement dans $L^2(\Omega \setminus \Gamma)^d$ et dans la suite d'espaces $(L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}$. Finalement, par complétude de ces espaces pour leur norme respective, les limites des suites $(\nabla v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $([v_k])_{k \in \mathbf{N}}$ pour $k \rightarrow \infty$ existent bien. □

La proposition 3.6 permet de définir rigoureusement les notions de *gradient faible* et de *saut généralisé*.

Définition 3.4 (Gradient faible & Saut généralisé). Soit $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$, les limites

$$\nabla v = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla v_k \text{ dans } L^2(\Omega \setminus \Gamma) \quad \text{et} \quad [v] = \lim_{k \rightarrow \infty} [v_k] \text{ dans } (L^2(\Gamma_j))_{j \in \mathbf{N}}.$$

sont nommés respectivement *gradient faible* et *saut généralisé* de la fonction v .

Remarque 3.3. Étant donné que la dimension fractale (et de Hausdorff) de Γ pourrait être supérieure à $d-1$, il n'est pas évident de définir $L^2(\Gamma)$ (et de déduire la convergence de $([v_k])_{k \in \mathbf{N}}$ dans $L^2(\Gamma)$), car il n'est pas évident de savoir quelle mesure choisir.

Nous pouvons maintenant démontrer les injections continues $\mathcal{H} \subset L^2$ et $\mathcal{H} \subset H^s$ pour $0 < s < \frac{1}{2}$.

3.2.2 Théorèmes d'injection pour \mathcal{H}

Nous allons maintenant montrer que l'espace fractal \mathcal{H} est un sous-espace des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ pour $s \in]0; \frac{1}{2}[$, munis de la norme de Sobolev–Slobodeckij

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{d+2s}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Nous montrons en annexe B que $H^s(\Omega)$, pour $s \in]0; 1[$, muni de cette norme est bien un espace de Banach. Nous cherchons maintenant à établir des théorèmes d'injection pour \mathcal{H} ce qui nécessite une estimation de la quantité $|v(x) - v(y)|^2$ pour $x, y \in \Omega$. Une telle estimation est fournie par le lemme suivant.

Lemme 3.1. Soient $k \in \mathbf{N}$, $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ et $x \neq y \in \Omega$. Alors,

$$|v(x) - v(y)|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + s(y - x))|^2 ds + \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi). \quad (3.12)$$

■ **Démonstration.** D'après [DD07, p. 100], pour une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$,

$$|f(x+h) - f(x)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{ds} (f(x+sh)) ds \right|.$$

Par dérivation de la fonction absolument continue $s \mapsto f(x+sh)$, on a :

$$\frac{d}{ds} (f(x+sh)) = \sum_{j=1}^d h_j \partial_j (f)(x+sh) = h \cdot \nabla f(x+sh)$$

On en déduit par la formule des sauts (annexe E.2) que pour une fonction $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ avec $k \in \mathbf{N}$ et en posant $h = y - x$ avec $x \neq y \in \Omega$, (où $\nabla v(x + s(y - x)) = 0$ si $x + s(y - x) \in \Gamma^{(k)}$)

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)|^2 &\leq \left(\int_0^1 \nabla v(x + s(y - x)) \cdot (y - x) ds + \sum_{j=1}^k \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2 \\ &\stackrel{\substack{(a+b)^2 \leq (1+\frac{1}{c})a^2 \\ +(1+c)b^2 \\ \text{et inégalité de C.-S.}}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + s(y - x))|^2 ds + (1+c) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2 \\ &\stackrel{\substack{\text{en décomposant} \\ \text{le second membre}}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + s(y - x))|^2 ds \\ &\quad + (1+c) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(\sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_1} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2 + (1+c)^2 \left(\sum_{j=2}^k \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2. \end{aligned}$$

D'après la définition 2.9 de $C_{k,j}$, on a $|(x,y) \cap G \cap \Gamma_j| \leq C_{1,j}$ pour $j \geq 2$ et $C_1 = 1$, on en déduit en appliquant Cauchy-Schwarz à la somme intérieure du dernier terme que

$$\left(\sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2 \leq |(x-y) \cap \Gamma_j| \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}^2(\xi) \leq C_j \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}^2(\xi)$$

On réitère ce découpage en isolant le terme pour $j = 2, 3, \dots$ et on obtient le résultat par récurrence. □

Théorème 3.2. L'espace \mathcal{H} satisfait aux propriétés d'injections continues suivantes

$$\mathcal{H} \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \subset H^s(\Omega)$$

pour tout $s \in [0; \frac{1}{2}[$. En particulier, on peut énoncer l'inégalité type Poincaré suivante

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (1+c)^j C_j \|[v]\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (3.13)$$

avec $C_P = (1 + \frac{1}{c}) \text{diam}(\Omega) \max \{ \text{diam}(\Omega), 1 \}$.

■ **Éléments de démonstration.** la démonstration complète est donnée dans [HKP19, Théorème 3.6] et utilise une approche introduite par Hummel dans [Hum00]. Soient $k \in \mathbf{N}$, $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ et $j = 1, \dots, k$.

(i) Pour tout vecteur unitaire $e \in \mathbf{R}^d$, on montre dans un premier temps que

$$\int_{\Omega} \sum_{\xi \in (x, x+\eta e) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dx \leq \eta \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j = \eta \|[v]\|_{L^2(\Gamma_j)}^2. \quad (3.14)$$

Cette estimation provient d'un argument géométrique qui consiste à introduire de manière *ad hoc* la première forme fondamentale (cf. E.5) de l'interface Γ_j pour faire apparaître une intégrale sur Γ_j .

(ii) En insérant l'estimation 3.14 après avoir intégré l'inégalité 3.12 du lemme précédent sur Ω avec $y = x + \eta e$ et en choisissant $\eta \geq \text{diam}(\Omega)$, on obtient

$$\int_{\Omega} |v(x) - v(x + \eta e)|^2 dx \leq \eta \left(1 + \frac{1}{c} \right) \left(\eta \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|[v]\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \right) \quad (3.15)$$

puis l'inégalité de type Poincaré 3.13, i.e.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|v\| \quad \text{avec } C_P = \left(1 + \frac{1}{c} \right) \text{diam}(\Omega) \max \{ \text{diam}(\Omega), 1 \}$$

ce qui nous fournit l'injection continue de \mathcal{H} dans $L^2(\Omega)$.

(iii) Maintenant, divisions 3.15 par $|\eta|^{d+2s}$ et intégrons sur $B(0, \text{diam}(\Omega)) = \{ \eta e \mid \eta \leq \text{diam}(\Omega), e \in \mathbb{S}^d \} \supset \Omega$ et d'après l'expression de la norme de Sobolev–Slobodeckij 3.11,

$$\|v\|_{H^s(\Omega)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c} \right) C_s \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|[v]\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \right)$$

ce qui est vrai pour tout $v \in \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ et tout $k \in \mathbf{N}$ avec $C_s = \max \{ \text{diam}(\Omega), 1 \} |\mathbb{S}^d| \int_0^{\text{diam}(\Omega)} \eta^{-2s} d\eta < +\infty$ pour tout $s \in [0; \frac{1}{2}[$. On conclut par le corollaire 3.1 selon lequel l'espace $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ est dense dans \mathcal{H} . □

Remarque 3.4. Une conséquence du théorème précédent est que pour toute suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$, il existe un unique $v \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ tel que

$$\|v - v_k\|_{H^s(\Omega)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall s \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[.$$

■ **Démonstration.**

(i) Nous avons montré dans le théorème 3.2 précédent, que l'espace \mathcal{H} peut être identifié à un sous-espace de $\bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ dans le sens où pour tout élément $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$, sa limite v dans \mathcal{H} peut être identifiée à un élément de $\bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$. Et par injection continue, pour $s \in]0; \frac{1}{2}[$,

$$\|v - v_k\|_{H^s(\Omega)} \leq C_s \|v - v_k\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

- (ii) L'unicité d'une telle limite est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : soient $v_1, v_2 \in H^s(\Omega)$ deux candidats, $\|v_1 - v_2\|_{H^s(\Omega)} \leq \|v_1 - v_k\|_{H^s(\Omega)} + \|v_2 - v_k\|_{H^s(\Omega)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, et donc $v_1 = v_2$. □

Remarque 3.5. La définition 3.4 est valable pour une fonction $v \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ associée à une fonction de \mathcal{H} par la remarque 3.4.

3.3 Produit scalaire explicite dans \mathcal{H}

La définition du gradient faible et du saut généralisé d'une fonction de $\bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ nous permet de donner une expression du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, construit dans le proposition 3.3, de l'espace fractal asymptotique \mathcal{H} .

Théorème 3.3 (Produit scalaire limite). Soient $v_{\mathcal{H}} = (v_k)_{k \in \mathbf{N}}$, $w_{\mathcal{H}} = (w_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$. Nous désignons par $v, w \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ les fonctions qui leur sont associées par la remarque 3.4. Alors,

$$\langle v_{\mathcal{H}}, w_{\mathcal{H}} \rangle = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \sum_{j=1}^{\infty} (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket \, d\Gamma_j. \quad (3.16)$$

■ **Démonstration.** Par la définition 3.4 des sauts généralisés,

$$\sum_{j=1}^k (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v_j \rrbracket \llbracket w_j \rrbracket \, d\Gamma_j \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket \, d\Gamma_j$$

et comme $\Gamma^{(k)}$ et Γ sont de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d (cf. 2.1), on en déduit que

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \nabla w_k \, dx = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v_k \cdot \nabla w_k \, dx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w \, dx,$$

ce qui conclut la démonstration. □

Par la suite, nous retiendrons l'expression 3.16 pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{H} .

Remarques 3.1.

- (i) *A posteriori*, l'inégalité de Poincaré 3.13 est bien de la forme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|v\|.$$

- (ii) Pour $k \in \mathbf{N}$, l'espace \mathcal{H}_k est bien défini pour toute valeur de c . Cependant, ceci n'est plus vrai pour l'espace limite \mathcal{H} . En effet, la norme des sauts $\|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}$ pour une fonction $v \in \mathcal{H}$ doit décroître suffisamment pour compenser le facteur exponentiel $(1 + c)^j C_j$, ce qui peut ne plus être le cas pour une constante $c' > c$.

Désormais, nous identifions $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$ à $v \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ selon la remarque 3.4 et utilisons l'expression 3.16 du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{H} . Nous établissons enfin une formule de Green dans \mathcal{H} .

Proposition 3.7 (Formule de Green dans \mathcal{H}). Soient $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$ et $v \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$ qui lui est associé par la remarque 3.4. Alors,

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \varphi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \varphi \, dx + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket \varphi \cdot \nu_j \, d\Gamma_j, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)^d.$$

■ **Démonstration ([HKP19]).** Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)^d$ et $k \in \mathbf{N}$. Par intégration par parties (voir annexe E.3 pour les détails),

$$\int_{\Omega} v_k \nabla \cdot \varphi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \varphi \, dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket v_k \rrbracket \varphi \cdot \nu_j \, d\Gamma_j. \quad (3.17)$$

Nous cherchons maintenant à passer à la limite $k \rightarrow \infty$. D'après la remarque 2.1, les interfaces $\Gamma^{(k)}$ pour $k \in \mathbf{N}$ et Γ sont de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d , ainsi on peut écrire

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \varphi \, dx = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v_k \cdot \varphi \, dx$$

et donc par la remarque 3.5,

$$\left| \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \varphi \, dx - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v_k \cdot \varphi \, dx \right| \leq \| \nabla v - \nabla v_k \|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)} \| \varphi \|_{L^\infty(\Omega)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

De même,

$$| \langle v - v_k, \nabla \cdot \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)} | \leq \| v - v_k \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla \cdot \varphi \|_{L^\infty} \leq \| v - v_k \|_{H^s(\Omega)} \| \nabla \cdot \varphi \|_{L^\infty} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Finalement, en passant à la limite $k \rightarrow \infty$ dans 3.17, on obtient le résultat. \square

3.4 Résumé des résultats du chapitre

(i) L'espace $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est complet pour la norme associée au produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \sum_{j=1}^{\infty} (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} \llbracket v \rrbracket \llbracket w \rrbracket \, d\Gamma_j,$$

$$\| v \|^2 = \| \nabla v \|^2_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)} + \sum_{j=1}^{\infty} (1 + c)^j C_j \| \llbracket v \rrbracket \|^2_{L^2(\Gamma_j)},$$

pour tout $v, w \in \mathcal{H}$.

(ii) Les espaces $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$ et $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont denses dans \mathcal{H} .

(iii) L'espace \mathcal{H} satisfait aux propriétés d'injections continues suivantes

$$\mathcal{H} \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \subset H^s(\Omega) \quad \forall s \in \left[0; \frac{1}{2} \right[.$$

En particulier, on peut énoncer l'inégalité type Poincaré suivante

$$\| v \|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \| v \|$$

avec $C_P = (1 + \frac{1}{c}) \text{diam}(\Omega) \max \{ \text{diam}(\Omega), 1 \}$.

(iv) Nous identifions $(v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$ à $v \in \bigcap_{0 < s < \frac{1}{2}} H^s(\Omega)$.

Chapitre 4

Problème à interface fractale

Maintenant que nous avons rigoureusement défini l'espace des solutions \mathcal{H} , nous sommes en mesure de nous intéresser à l'étude du problème elliptique de départ 1.1. Nous allons introduire une famille de formulations variationnelles définies sur les espaces \mathcal{H}_k pour lesquelles nous montrerons l'existence et l'unicité d'une solution. Nous faisons le choix, contrairement à l'article [KPY22], de présenter dans un premier temps une formulation faible sur les espaces \mathcal{H}_k avant de passer à une formulation faible définie sur l'espace fractal asymptotique \mathcal{H} .

Enfin, nous tenterons d'écrire explicitement les formulations fortes associées aux formulations faibles que nous aurons étudiées.

4.1 Formulation faible à échelle finie sur les espaces \mathcal{H}_k

On introduit le problème k -échelle pour $k \in \mathbf{N}$

$$\boxed{\text{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \text{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \text{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k} \quad (\text{PiF}_k)$$

où le terme source f est pris dans $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel (\cdot, \cdot) et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a_k(v_k, w_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A \nabla v_k \cdot \nabla w_k \, dx + \sum_{j=1}^k (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j} B[[v_k]][[w_k]] \, d\Gamma_j, \quad \forall v_k, w_k \in \mathcal{H}_k \quad (4.1)$$

où $A: \Omega \setminus \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^{d \times d}$ et $B: \Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_j \rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $x \in \Omega \setminus \Gamma$, la matrice $A(x) \in \mathbf{R}^{d \times d}$ est symétrique et vérifie les propriétés suivantes

$$\alpha_0 |\xi|^2 \leq A(x) \xi \cdot \xi, \quad |A(x) \xi \cdot \eta| \leq \alpha_1 |\xi| |\eta|, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^d \quad \forall x \in \Omega \setminus \Gamma \subset \Omega \setminus \Gamma^{(k)} \quad (4.2)$$

où $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbf{R}_+$. On suppose également que

$$0 < \beta_0 \leq B(x) \leq \beta_1 \quad \forall x \in \Gamma^{(k)} \subset \Gamma \quad (4.3)$$

où $\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}$.

Ces hypothèses nous permettent d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, le problème d'interface k -échelle PiF_k admet une unique solution notée $u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k$.*

■ **Démonstration.** Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème PiF_k , nous allons appliquer le théorème de Lax–Milgram.

- (i) L'espace \mathcal{H}_k est un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ et la norme associée $\| \cdot \|_k$ (cf. 2.5).
- (ii) La forme $a_k(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et continue sur $\mathcal{H}_k \times \mathcal{H}_k$. En effet, soient $v_k, w_k \in \mathcal{H}_k$, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|a_k(v_k, w_k)| \leq \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} |A \nabla v_k \cdot \nabla w_k| \, dx + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} |B[[v_k]][[w_k]]| \, d\Gamma_j$$

$$\text{d'après 4.2 et 4.3} \leq \alpha_1 \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} |\nabla v_k| |\nabla w_k| \, dx + \beta_1 \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} |[v_k]| |[w_k]| \, d\Gamma_j$$

$$\text{d'après C.-S.} \leq \max\{\alpha_1, \beta_1\} \left\| \nabla v_k \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})} \left\| \nabla w_k \right\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})} + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \left\| [v_k] \right\|_{L^2(\Gamma_j)} \left\| [w_k] \right\|_{L^2(\Gamma_j)} \right|$$

$$\text{d'après C.-S. dans } \mathbf{R}^{k+1} \leq \max\{\alpha_1, \beta_1\} \|v_k\|_k \|w_k\|_k$$

soit

$$|a_k(v_k, w_k)| \leq U \|v_k\|_k \|w_k\|_k \quad \text{avec } U = \max\{\alpha_1, \beta_1\}. \quad (4.4)$$

- (iii) La forme $a_k(\cdot, \cdot)$ est coercive. En effet, soit $v_k \in \mathcal{H}_k$, d'après les hypothèses 4.2 et 4.3

$$a_k(v_k, v_k) \geq \alpha_0 \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} |\nabla v_k|^2 \, dx + \beta_0 \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} [v_k]^2 \, d\Gamma_j \geq \min\{\alpha_0, \beta_0\} \|v_k\|_k^2.$$

soit

$$\mathbf{a} \|v_k\|_k^2 \leq a_k(v_k, v_k) \quad \text{avec } \mathbf{a} = \min\{\alpha_0, \beta_0\}. \quad (4.5)$$

- (iv) La forme (f, \cdot) est linéaire et continue sur \mathcal{H}_k . En effet, soit $v_k \in \mathcal{H}_k$, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis l'inégalité de type Poincaré 3.13,

$$|(f, v_k)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_k\| = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_k\|_k.$$

La dernière égalité est une conséquence du fait que $\mathcal{H}_1 \subset \dots \subset \mathcal{H}_k \subset \dots \subset \mathcal{H}$ (cf. 3.4) et que ces inclusions sont isométriques (cf. 2.2).

Finalement, en vertu du lemme de Lax–Milgram, le problème d'interface k -échelle PiF_k admet une unique solution pour tout $k \in \mathbf{N}$. \square

4.2 Formulation faible sur l'espace asymptotique fractal \mathcal{H}

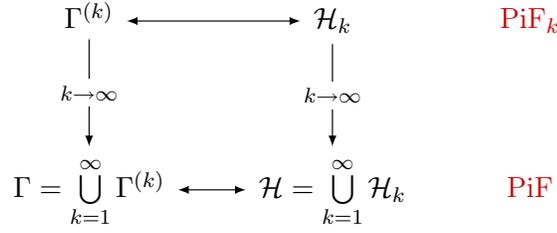
Nous considérons à présent le problème à interface fractale suivant

$$\boxed{\text{Trouver } u \in \mathcal{H} \text{ tel que } a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{H}} \quad (\text{PiF})$$

où le terme source f est pris dans $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel (\cdot, \cdot) et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a(v, w) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} A \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \sum_{j=1}^{\infty} (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} B[[v]][[w]] \, d\Gamma_j, \quad v, w \in \mathcal{H},$$

où les applications A et B vérifient les hypothèses 4.2 et 4.3 énoncées précédemment.


 FIGURE 4.1 – Passage à la limite de la formulation faible k -échelle

Remarques 4.1.

- (i) Pour tout $v_k, w_k \in \mathcal{H}_k$, on a $a(v_k, w_k) = a_k(v_k, w_k)$. En effet, pour tout $j > k$, les sauts $\llbracket v_k \rrbracket(\Gamma_j)$ sont nuls.
- (ii) Afin de modéliser des milieux très hétérogènes, la matrice A peut être choisie avec des oscillations spatiales très rapides. Les méthodes numériques qui seront introduites dans la suite pour approximer la solution du problème **PiF** sont robustes vis-à-vis de ce comportement [Pod22, p.52].

Proposition 4.2. *Les hypothèses 4.2 et 4.3 entraînent que la forme $a(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive au sens où*

$$|a(v, w)| \leq \mathbf{U} \|v\| \|w\|, \quad \mathbf{a} \|v\|^2 \leq a(v, v) \quad \forall v, w \in \mathcal{H}$$

avec $\mathbf{U} = \max\{\alpha_1, \beta_1\}$ et $\mathbf{a} = \min\{\alpha_0, \beta_0\}$.

■ **Démonstration.** On sait d'après 4.4 et 4.5 que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et $v_k, w_k \in \mathcal{H}_k$,

$$|a_k(v_k, w_k)| \leq \mathbf{U} \|v_k\|_k \|w_k\|_k \quad \text{et} \quad \mathbf{a} \|v_k\|_k^2 \leq a_k(v_k, v_k). \quad (4.6)$$

Or, d'après la définition 3.3 de la norme $\|\cdot\|$, on a d'une part que pour $v = (v_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathcal{H}$,

$$\|v\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_k,$$

et d'autre part, en procédant de la même manière que dans la démonstration du théorème 3.3, on a que

$$a_k(v_k, w_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a(v, w).$$

Finalement, en passant à la limite $k \rightarrow \infty$ dans les inégalités 4.6, on trouve le résultat. \square

Remarque 4.1. On en déduit que pour tout $v \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{a} \|v\| \leq a(v, v) \leq \mathbf{U} \|v\|,$$

ainsi la forme $a(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire dans \mathcal{H} et la norme associée $\|\cdot\|_a = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$.

Proposition 4.3. *Le problème **PiF** est bien posé.*

■ **Démonstration.** Montrons que les hypothèses du lemme de Lax–Milgram sont vérifiées.

- (i) L'espace \mathcal{H} est un espace de Hilbert réel dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$ (cf. 3.1).

- (ii) D'après la proposition 4.2, la forme $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire, continue sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ et coercive.
- (iii) La forme (f, \cdot) est linéaire et continue sur \mathcal{H} . En effet, soit $v \in \mathcal{H}$, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis l'inégalité de type Poincaré 3.13,

$$|(f, v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|.$$

D'après le lemme de Lax–Milgram, le problème **PiF** admet une unique solution que l'on note $u \in \mathcal{H}$. Montrons que cette unique solution u est stable par rapport aux données, à savoir

$$\|u\| \leq \frac{1}{\mathbf{a}} C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.7)$$

Comme u est solution du problème **PiF**, on a en particulier que $a(u, u) = (f, u)$. La coercivité de $a(\cdot, \cdot)$, l'inégalité de Cauchy–Schwarz puis l'inégalité de Poincaré 3.13 fournissent

$$\mathbf{a} \|u\|^2 \leq a(u, u) = (f, u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|,$$

ce qui donne l'inégalité 4.7 après division par \mathbf{a} et $\|u\|$. □

4.3 Convergence des solutions à échelle finie vers la solution fractale

Nous souhaitons montrer que la solution du problème **PiF_k** converge pour $k \rightarrow \infty$ vers la solution du problème **PiF** pour la norme $\|\cdot\|$. Énonçons d'abord un lemme de Céa.

Lemme 4.1 (de Céa). *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'unique solution $u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k$ du problème d'interface k -échelle **PiF_k** vérifie l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_{\mathcal{H}_k}\| \leq \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}} \inf_{v_k \in \mathcal{H}_k} \|u - v_k\|.$$

■ **Démonstration.** Remarquons dans un premier temps que

$$a(u_{\mathcal{H}_k} - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{H}_k. \quad (4.8)$$

En effet, on sait que

$$\begin{aligned} a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) &= (f, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{H}_k \\ a(u, v) &= (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

et ainsi, d'après la remarque 4.1 d'une part et le fait que $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ d'autre part, pour tout $v_k \in \mathcal{H}_k$,

$$a(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \quad \text{et} \quad a(u, v_k) = (f, v_k).$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient bien la relation 4.8. On en déduit qu'en insérant une fonction $v_k \in \mathcal{H}_k$ dans la relation de coercivité de la forme $a(\cdot, \cdot)$

$$\mathbf{a} \|u - u_{\mathcal{H}_k}\|^2 \leq a(u - u_{\mathcal{H}_k}, u - u_{\mathcal{H}_k}) = a(u - u_{\mathcal{H}_k}, u - v_k) + \underbrace{a(u - u_{\mathcal{H}_k}, v_k - u_{\mathcal{H}_k})}_{=0}$$

et par continuité de $a(\cdot, \cdot)$, on a $\mathbf{a} \|u - u_{\mathcal{H}_k}\|^2 \leq \mathbf{U} \|u - u_{\mathcal{H}_k}\| \|u - v_k\|$, soit

$$\|u - u_{\mathcal{H}_k}\| \leq \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}} \|u - v_k\| \quad \forall v_k \in \mathcal{H}_k.$$

On conclut en passant à la borne inférieure. □

Le lemme de Céa 4.1 et le résultat de densité 3.5 permettent d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 4.4 (Convergence de la solution $u_{\mathcal{H}_k}$). La solution $u_{\mathcal{H}_k}$ du problème PiF_k converge vers la solution u du problème PiF , i.e.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_{\mathcal{H}_k}\| = 0.$$

■ **Démonstration.** Comme les sous-espaces $(\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sont denses dans \mathcal{H} , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathcal{H}_k)_{k \in \mathbf{N}}$, i.e. telle que $u_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$, telle que pour k suffisamment grand, $\|u - u_k\| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour k suffisamment grand, $\inf_{v \in \mathcal{H}_k} \|u - v\| \leq \varepsilon$ et donc d'après le lemme de Céa 4.1, on obtient le résultat de convergence souhaité. \square

4.4 Détermination de la formulation forte

Cette section donne les premiers résultats qui permettent d'arriver à la formulation forte du problème PiF .

Rappel de la formulation faible dans \mathcal{H}_k . On introduit le problème k -échelle pour $k \in \mathbf{N}$

$$\text{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \text{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \text{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k \quad (\text{PiF}_k)$$

où le terme source f est pris dans $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel (\cdot, \cdot) et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a_k(v_k, w_k) = \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A \nabla v_k \cdot \nabla w_k \, dx + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} B[[v_k]][[w_k]] \, d\Gamma_j, \quad \forall v_k, w_k \in \mathcal{H}_k.$$

Théorème 4.1 (Formulation forte du problème PiF_k).

Trouver $u_k: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\text{div}(A \nabla u_k) = f & \text{dans } G \in \Omega^{(k)} \\ \{A \nabla u_k \cdot \nu_j\} = -(1+c)^j C_j B[[u_k]] & \text{sur } \Gamma_j \in \Gamma^{(k)} \\ \llbracket A \nabla u_k \cdot \nu_j \rrbracket = 0 & \text{sur } \Gamma_j \in \Gamma^{(k)} \\ u_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

L'objectif de cette section est de montrer que la formulation forte 4.9 est équivalente à la formulation faible PiF_k . Pour cela, montrons dans un premier temps la formule de Green suivante.

Lemme 4.2 (Une formule de Green). Soient $k \in \mathbf{N}$ et $\varphi \in \bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{C}^\infty(\overline{G}) \cap \{\varphi|_{\partial G} = 0\}$. Pour tout $v_k \in \mathcal{H}_k$,

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A \nabla v_k \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \text{div}(A \nabla v_k) \varphi \, dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket A \nabla v_k \cdot \nu_j \rrbracket \varphi \, d\Gamma_j.$$

■ **Démonstration.** Tout d'abord, décomposons le terme de gauche

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A \nabla v_k \cdot \nabla \varphi \, dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx.$$

Soit $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$,

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \int_G A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx.$$

Or, pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, $v_k|_G \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ (cf. définition 2.1 de $\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega)$) et on suppose que l'on peut appliquer une formule de Green qui mène à

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \left[- \int_G \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \varphi dx + \int_{\partial G} A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \mathbf{n}_{G,i} \varphi d\Gamma \right] \\ &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \varphi dx + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \int_{\partial G} A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \mathbf{n}_{G,i} \varphi d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \varphi dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \left[A(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \mathbf{n}_{\Gamma_j,i} \right] (\Gamma_j) \varphi d\Gamma \end{aligned}$$

Finalement, en sommant sur $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, on obtient le résultat en omettant l'interface dans le saut et en notant $\nu_j = \mathbf{n}_{\Gamma_j}$. \square

Théorème 4.2 ([BBH21, Théo. 6.9]). Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^d de classe \mathcal{C}^1 . L'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

On déduit du théorème 4.2 que l'espace $\bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{C}^\infty(\overline{G}) \cap \{\varphi|_{\partial G} = 0\}$ est dense dans \mathcal{H}_k et donc que la formule de Green établie dans le lemme 4.2 s'étend aux fonctions $\varphi \in \mathcal{H}_k$.

Lemme 4.3. Pour tout $G \in \Omega^{(k)}$,

$$-\operatorname{div}(A\nabla u_k) = f \text{ p.p.}$$

■ **Démonstration.** Soient $G \in \Omega^{(k)}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(G)$. La formulation faible PiF_k restreinte à la cellule G se simplifie alors en

$$\int_G A\nabla v_k \cdot \nabla \varphi dx = \int_G f \varphi dx$$

car les sauts de φ sont nuls. L'application de la formule de Green 4.2 permet alors d'obtenir

$$- \int_G \operatorname{div}(A\nabla u_k) \varphi dx = \int_G f \varphi dx$$

car φ est nulle aux interfaces. On en déduit que $-\operatorname{div}(A\nabla u_k) = f$ au sens des distributions et comme $f \in L^2(\Omega)$, on déduit que cette égalité est vraie presque partout dans G . \square

Remarque 4.2 ([CLog, Propriété 1.2]). Bien que les fonctions appartenant à l'espace $H^1(\Omega)$ ne soient pas nécessairement continues en dimension d'espace $d \geq 2$, on peut toutefois démontrer que des fonctions globalement H^1 présentent un saut nul sur une interface quelconque. En outre, si elles sont continues de chaque côté de l'interface, elles sont en fait globalement continues.

Examinons maintenant les conditions aux interfaces du problème 4.9.

■ **Démonstration.** D'après le lemme 4.2 et le lemme 6.3, pour tout $v_k \in \mathcal{H}_k$

$$\int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} A\nabla u_k \cdot \nabla v_k dx - \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket A\nabla u_k \cdot \nu_j \rrbracket v_k d\Gamma_j = \int_{\Omega} f v_k dx,$$

et comme u_k est solution de la formulation variationnelle,

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket A\nabla u_k \cdot \nu_j \rrbracket v_k d\Gamma_j = - \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \int_{\Gamma_j} B[u_k] \llbracket v_k \rrbracket d\Gamma_j.$$

En écrivant $[[A\nabla u_k \cdot \nu_j]]v_k = [[A\nabla u_k \cdot \nu_j \times v_k]]$ et par la formule $[[fg]] = [[f]]\{\{g\}\} + \{\{g\}\}[[f]]$, on en déduit que

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \left[[[A\nabla u_k \cdot \nu_j]]\{\{v_k\}\} + (\{\{A\nabla u_k \cdot \nu_j\}\} + (1+c)^j C_j B[[u_k]])[[v_k]] \right] d\Gamma_j = 0.$$

On choisit en particulier $v_k \in H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{H}_k$. Alors, par la remarque 4.2, pour toute interface Γ_j , le saut $[[v_k]](\Gamma_j)$ est nul et donc

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} [[A\nabla u_k \cdot \nu_j]]\{\{v_k\}\} d\Gamma_j = 0 \quad \text{et} \quad [[A\nabla u_k \cdot \nu_j]] = 0 \quad \text{dans} \quad H^{1/2}(\Gamma_j).$$

On en déduit que pour tout $v_k \in \mathcal{H}_k$,

$$\sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} (\{\{A\nabla u_k \cdot \nu_j\}\} + (1+c)^j C_j B[[u_k]])[[v_k]] d\Gamma_j = 0,$$

ce qui, avec des choix judicieux de v_k permet d'obtenir la deuxième condition aux interfaces. \square

Deuxième partie

Développement des outils

Résumé

Chapitre 5. Éléments finis classiques sur des échelles finies

Chapitre 6. Construction d'opérateurs de projection $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k$ où $\Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$ et $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$ possèdent les propriétés désirées [1.3](#). Comme les projections $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ peuvent être prises telles quelles dans la littérature (*cf.* références dans [\[KPY22, p.1453\]](#)), nous nous concentrons essentiellement sur la construction et l'analyse de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ en étendant des concepts connus sur les inégalités de Poincaré locales [\[Caro6 ; Verg9\]](#). Ici, la présence de **termes de saut** engendre un certain nombre de **difficultés techniques**.

Chapitre 5

Éléments finis classiques sur des échelles finies

Dans le chapitre précédent, nous avons montré le caractère bien posé des formulations variationnelles suivantes

$$\text{Trouver } u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k \text{ tel que } a_k(u_{\mathcal{H}_k}, v_k) = (f, v_k) \text{ pour tout } v_k \in \mathcal{H}_k; \quad (\text{PiF}_k)$$

et

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{H} \text{ tel que } a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{H}. \quad (\text{PiF})$$

Dans ce chapitre, nous introduisons une formulation variationnelle discrète du problème PiF_k sur un espace d'éléments finis \mathbb{P}_1 classique noté \mathcal{S}_k . Nous rappelons dans un premier temps la construction d'un tel espace à partir d'un maillage $\mathcal{T}^{(k)}$ de Ω , puis nous montrerons que la formulation variationnelle discrète est bien posée et que sa solution converge bien vers la solution du problème asymptotique PiF .

5.1 Notations et hypothèses

Soit $\mathcal{T}^{(0)}$ une partition de Ω en simplexes de diamètre maximal $h_0 > 0$, qui est *régulière* dans le sens où pour tout $T_\ell, T_{\ell'} \in \mathcal{T}^{(0)}$, les propriétés suivantes sont vérifiées

- (i) $\mathring{T}_\ell \neq \emptyset$;
- (ii) $\mathring{T}_\ell \cap \mathring{T}_{\ell'} = \emptyset$ si $\ell \neq \ell'$;
- (iii) $\bigcup_\ell T_\ell = \bar{\Omega}$;
- (iv) toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle, soit une arête portée par la frontière.

Définition 5.1 (Pas du maillage). Soit \mathcal{T} un maillage de Ω . Le *pas du maillage* h est défini par

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq \ell \leq |\mathcal{T}|} h_\ell$$

où h_ℓ est le rayon du plus petit cercle contenant T_ℓ .

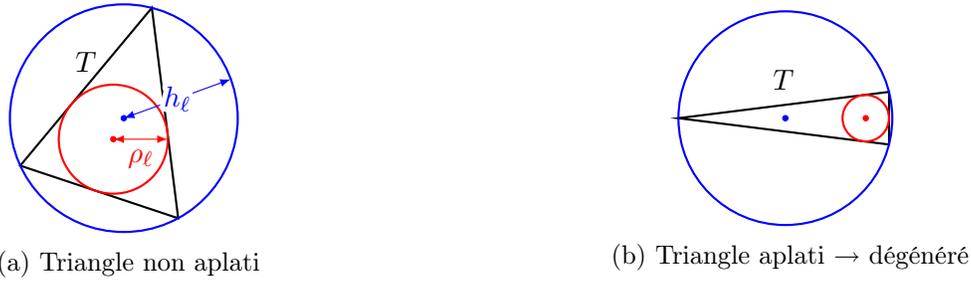
On introduit également pour chaque triangle T_ℓ , le rayon ρ_ℓ du plus grand cercle inclus dans T_ℓ .

Hypothèse de régularité des maillages. On suppose que la famille de maillage $(\mathcal{T}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est régulière, *i.e.*, il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\forall \ell, \quad \frac{h_\ell}{\rho_\ell} \leq \sigma. \quad (5.1)$$

Remarque 5.1. En 2D, cette hypothèse est équivalente à la condition angulaire

$$\exists \theta_0 > 0, \quad \forall h > 0, \quad \forall T_\ell \in \mathcal{T}^{(k)}, \quad \theta_{T_\ell} \geq \theta_0 \quad \text{où } \theta_{T_\ell} \text{ est la plus petit angle de } T_\ell.$$


 FIGURE 5.1 – Régularité des maillages $\mathcal{T}^{(k)}$

Notation. Dans la suite, nous noterons h_k le pas du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$.

Nous supposons que la suite de partitions $(\mathcal{T}^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ résultant de raffinements successifs de $\mathcal{T}^{(0)}$ est **adaptée au réseau d'interfaces** dans le sens où pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe une partition $\mathcal{T}^{(k)}$, obtenue après un nombre fini de raffinements, telle que les interfaces Γ_j pour $j = 1, \dots, k$, peuvent être représentées par des faces des simplexes $T \in \mathcal{T}^{(k)}$, *i.e.*, il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}_\Gamma^{(k)}$ de l'ensemble $\mathcal{E}^{(k)}$ des faces des simplexes $T \in \mathcal{T}^{(k)}$ tel que

$$\Gamma^{(k)} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_\Gamma^{(k)} \subset \mathcal{E}^{(k)}} E. \quad (5.2)$$

Cela entraîne en particulier que pour toute cellule $G \in \Omega^{(k)}$, l'ensemble $\mathcal{T}_G^{(k)} = \{T \in \mathcal{T}^{(k)} \mid T \subset \overline{G}\}$ est une partition locale de G et que le diamètre maximal h_k des simplexes $T \in \mathcal{T}^{(k)}$ est majoré par le diamètre maximal d_k des cellules $G \in \Omega^{(k)}$. De plus, nous supposons que $\Omega^{(k)}$ n'est pas « sur-résolu » dans le sens où il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de $k \in \mathbf{N}$ telle que

$$\delta d_k \leq h_k \leq d_k, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (5.3)$$

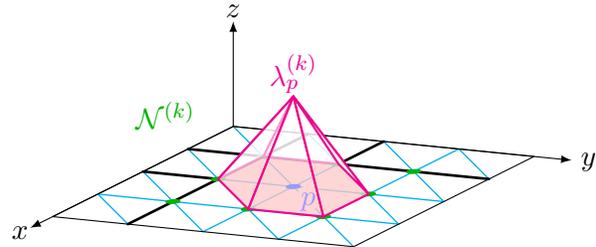
Définitions 5.1. Pour $k \in \mathbf{N}$ et $G \in \Omega^{(k)}$, on note $\mathcal{N}_G^{(k)}$ l'ensemble des sommets du simplexe $T \in \mathcal{T}_G^{(k)}$ hors du bord $\partial\Omega$ et $\mathcal{S}_k(G)$ l'espace d'éléments finis local, fonctions affines par morceaux sur la partition locale $\mathcal{T}_G^{(k)}$ qui s'annulent sur $\partial G \cap \partial\Omega$.

En notant $\lambda_p^{(k)}$ la fonction de base \mathbb{P}_1 associée au sommet $p \in \mathcal{N}_G^{(k)}$, on peut écrire

$$\mathcal{S}_k(G) = \text{Vect}\{\lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}_G^{(k)}\},$$

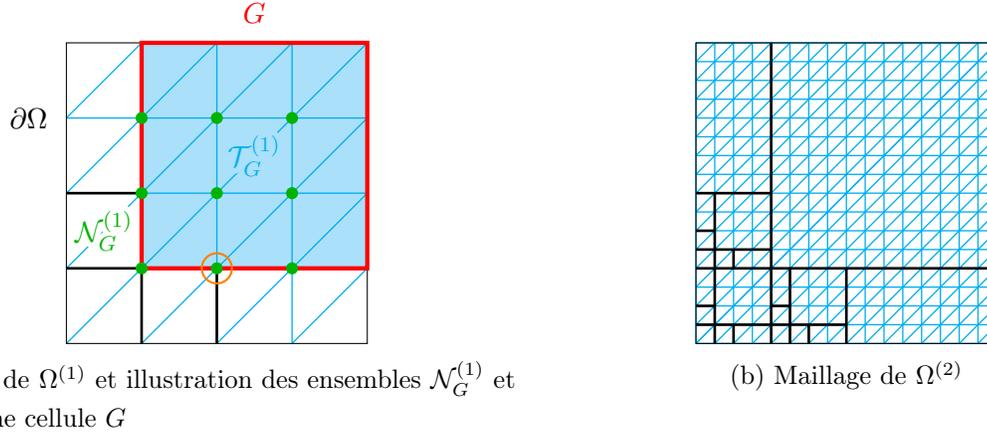
et en prolongeant ces fonctions par zéro de \overline{G} à Ω , on définit l'espace d'éléments finis

$$\mathcal{S}_k = \text{Vect}\{\lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)}\} \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}^{(k)} = \bigcup_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{N}_G^{(k)}.$$


 FIGURE 5.2 – Fonction de base $\lambda_p^{(k)} \in \mathbb{P}_1$ pour $k = 1$

Remarques 5.1.

- (i) L'espace \mathcal{S}_k contient les sauts au travers des interfaces Γ_j pour $1 \leq j \leq k$.
- (ii) À tout sommet sur une interface Γ_j avec deux (ou plus) cellules adjacentes $G, G' \in \Omega^{(k)}$, correspondent deux (ou plus) nœuds $p \in \mathcal{N}_G^{(k)}$ et $p' \in \mathcal{N}_{G'}^{(k)}$. C'est le cas du sommet encerclé en orange sur la figure 5.3a.



(a) Maillage de $\Omega^{(1)}$ et illustration des ensembles $\mathcal{N}_G^{(1)}$ et $\mathcal{T}_G^{(1)}$ pour une cellule G

(b) Maillage de $\Omega^{(2)}$

FIGURE 5.3 – Illustration des maillages pour $k = 1, 2$

5.2 Formulation variationnelle discrète

La discrétisation sur l'espace \mathcal{S}_k du problème d'interface k -échelle PiF_k est donné par

$$\boxed{\text{Trouver } u_{\mathcal{S}_k} \in \mathcal{S}_k \text{ tel que } a_k(u_{\mathcal{S}_k}, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k}, \quad (\text{FEMPiF}_k)$$

où la forme $a_k(\cdot, \cdot)$ est définie par 4.1.

Proposition 5.1. *Le problème FEMPiF_k admet une unique solution.*

■ **Démonstration (de la proposition 5.1).** On remarque que pour $k \in \mathbf{N}$, l'espace d'éléments finis \mathcal{S}_k est un sous-espace de l'espace des solutions \mathcal{H}_k . En effet, $\mathcal{S}_k \subset H^1(\Omega) \subset \mathcal{H}_k$. De plus, comme l'espace de discrétisation \mathcal{S}_k est de dimension finie, c'est un sous-espace fermé de \mathcal{H}_k et c'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, associé à la norme $\|\cdot\|_k$. On peut alors appliquer le théorème de Lax–Milgram de la même manière que dans la démonstration de la proposition 4.1. \square

Notation. On note $u \in \mathcal{H}$, $u_{\mathcal{H}_k} \in \mathcal{H}_k$ et $u_{\mathcal{S}_k} \in \mathcal{S}_k$ respectivement l'unique solution du problème PiF , PiF_k et FEMPiF_k .

Théorème 5.1. *La suite des approximations par éléments finis $(u_{\mathcal{S}_k})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la solution u de PiF dans le sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $k \in \mathbf{N}$ tel que*

$$\|u - u_{\mathcal{S}_k}\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|u_{\mathcal{H}_k} - u_{\mathcal{S}_k}\| < \varepsilon.$$

Pour démontrer ce résultat, nous appliquerons le lemme suivant, que nous démontrons comme le lemme 4.1.

Lemme 5.1 (de Céa). *Soit $k \in \mathbf{N}$,*

$$\|u_{\mathcal{H}_k} - u_{\mathcal{S}_k}\| \leq \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}} \inf_{v \in \mathcal{S}_k} \|u_{\mathcal{H}_k} - v\|.$$

■ **Démonstration.** D'après l'inégalité triangulaire, pour $k \in \mathbf{N}$,

$$\|u - u_{\mathcal{S}_k}\| \leq \|u - u_{\mathcal{H}_k}\| + \|u_{\mathcal{H}_k} - u_{\mathcal{S}_k}\|.$$

Nous avons d'après la proposition 4.4 que le premier terme du majorant tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Il reste donc à montrer qu'il en est de même pour le second terme, ce que nous allons faire en montrant que

$\inf_{v \in \mathcal{S}_k} \|u_{\mathcal{H}_k} - v\| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$, et en appliquant le lemme de Céa 5.1. Les résultats de convergence classiques de la méthode des éléments finis affirment que la convergence vers 0 est bien vérifiée, ce qui fournit le résultat final. \square

Remarque 5.2. Des estimations *a priori* de l'erreur de discrétisation $\|u - u_{\mathcal{S}_k}\|$ sont difficiles à obtenir du fait du caractère fractal des interfaces Γ_j . [KPY22, p. 1458]

Chapitre 6

Construction d'opérateurs de projection

$$\Pi_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k$$

Ce chapitre est consacré à la construction d'opérateurs de projection Π_k de l'espace fonctionnel fractal \mathcal{H} dans l'espace d'éléments finis \mathcal{S}_k associé au maillage $\mathcal{T}^{(k)}$ du domaine Ω peuplé par le réseau d'interfaces $\Gamma^{(k)}$, qui vérifient les propriétés d'approximation et de stabilité suivantes

$$\exists c, c' > 0 \quad \|v - \Pi_k v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) c d_k^2 \|v\|^2, \quad \text{et} \quad \|\Pi_k v\| \leq c' \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (6.1)$$

L'existence de tels opérateurs permet d'appliquer à notre problème à interfaces fractales des approches bien connues d'homogénéisation numérique, en particulier la méthode de *décomposition locale orthogonale et correction par sous-espaces*.

La construction et l'analyse de projections adéquates $\Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$, $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k$ et leur composition $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k}$, qui vérifient tous les propriétés 6.1, seront menées en adaptant des idées basées sur les inégalités locales de type Poincaré, qui sont l'objet de la section suivante [Pod22, p.54].

6.1 Inégalités locales de type Poincaré

Cette section se consacre à établir des inégalités locales de type Poincaré dans des domaines étoilés $\omega \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Afin de démontrer les bonnes propriétés des projection Π_k , il sera essentiel de **quantifier la dépendance de la constante de Poincaré** des différents paramètres géométriques. Dans l'espace $H^1(\Omega)$, différentes approches ont été étudiées dans le cas de domaine non convexe et étoilé.

- (i) Une approche consiste à établir des configurations de référence équivalentes par transformation affine au domaine étudié et ainsi estimer la constante de Poincaré pour chacune de ces configurations de référence.
- (ii) Une deuxième approche consiste à construire des opérateurs de prolongement du domaine ω vers un domaine plus grand mais plus simple, comme une boule, sur lequel on sait estimer la constante de Poincaré [CFoo].
- (iii) R. Verfürth a introduit une troisième approche qui consiste à estimer la constante de Poincaré sur des **boules** et des **bords de boules** [Ver99]. Cette approche peut s'adapter directement sur l'espace fractal \mathcal{H} . Dans ce cas, les domaine ω s'intersectent avec les interfaces Γ_ℓ pour $\ell > k$. Ainsi, la principale difficulté sera de **gérer les contributions des sauts** à travers les interfaces d'échelle plus fine Γ_ℓ [Pod22, p.55].

Cette section est consacrée aux inégalités locales type Poincaré dans (des sous-ensembles) de cellules $G \subset \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Pour rappel, $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ est l'ensemble des cellules uniquement présentes lors de l'itération

k (i.e. qui seront subdivisées à l'itération $k + 1$) et donc sont d'intersection non vide avec les interfaces Γ_j des itérations suivantes $j > k$. Nous utiliserons la notation

$$B(G, R) = \{p_G + rs \mid s \in \mathbb{S}^{d-1}, 0 \leq r \leq R\}$$

pour $G \in \Omega^{(k)}$ et $R > 0$. Dans la suite, nous utiliserons la notation

$$\int_M v \, dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|M|} \int_M v \, dx$$

pour $M \subset G$. Remarquons qu'obtenir une inégalité locale de type Poincaré sur les boules $B = B(G, R)$, c'est-à-dire estimer la quantité

$$\left\| v - \int_B v \, dx \right\|_{L^2(B)}^2 = \int_B \left| \int_B v(x) - v(y) \, dx \right|^2 dy \leq \int_B \int_B |v(x) - v(y)|^2 \, dx \, dy$$

pour tout $v \in \mathcal{H}$ revient à estimer la différence $|v(x) - v(y)|^2$ [Pod22, p.55]. Une estimation de cette quantité est donnée par le lemme 6.1.

Ce qui suit dans cette section est un ensemble de résultats intermédiaires, essentiellement des lemmes, qui nous permettront de formuler une inégalité locale de type Poincaré sur des ouverts $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Le diagramme 6.1 donne une vue ensemble de la dépendance de ces résultats.

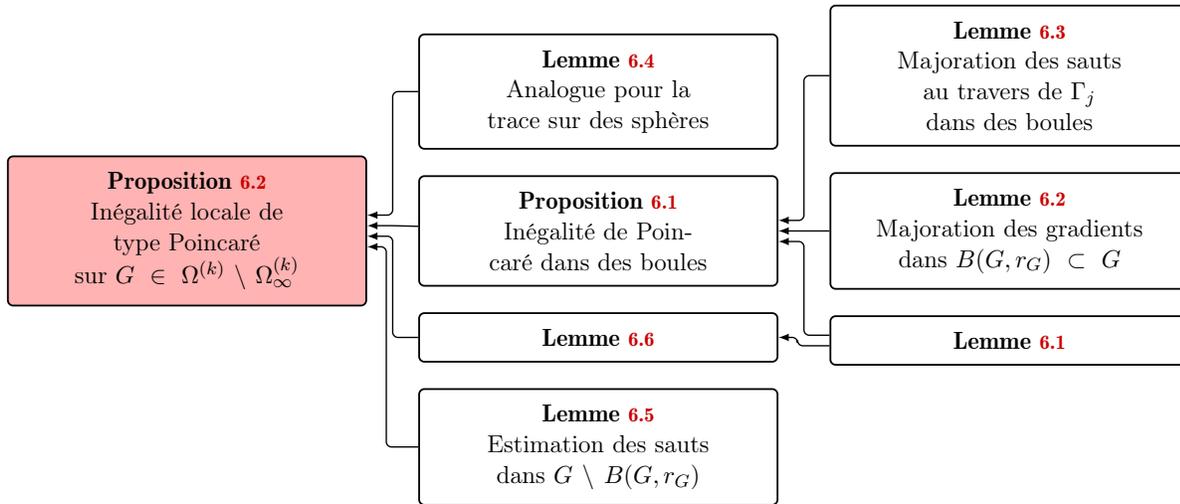


FIGURE 6.1 – Diagramme de la démonstration de l'inégalité locale de type Poincaré sur $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$

Les deux figures qui suivent, 6.2 et 6.3, illustrent la stratégie de R. Verfürth décrite au point (iii) et qui consiste à considérer une cellule contenant des interfaces et à la « découper » en trois portions ; la plus grande boule inscrite, son bord et le complémentaire de la boule fermée.

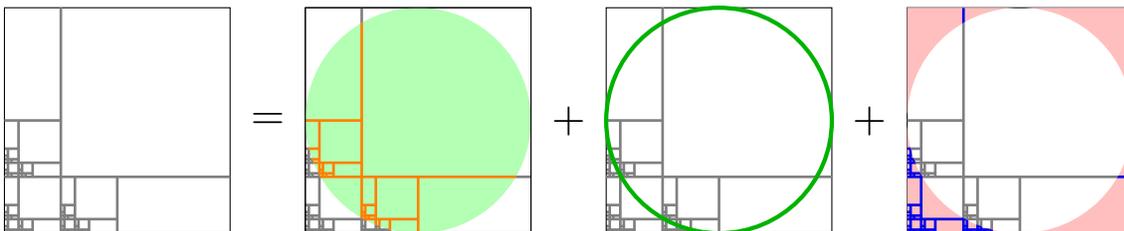


FIGURE 6.2 – Stratégie pour l'élaboration d'une inégalité locale de type Poincaré

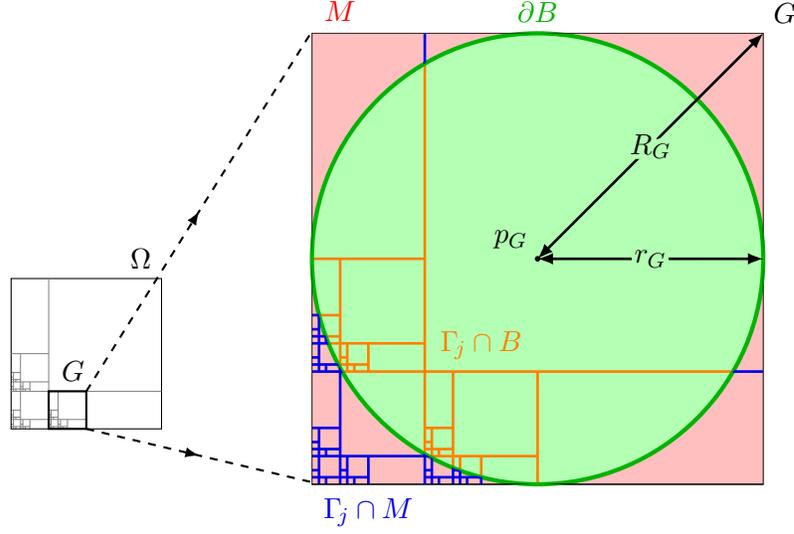


FIGURE 6.3 – Stratégie pour l'élaboration d'une inégalité locale de type Poincaré (bis)

Lemme 6.1. Soient $k \in \mathbf{N}$, $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, $K > k$ et $x, y \in G$ avec $(x, y) \subset G$ tels que $|(x, y) \cap \Gamma^{(K)}| < \infty$. Alors,

$$|v(x) - v(y)|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \left(\int_0^1 |\nabla v(x + t(y - x))| dt\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) \quad \forall v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$$

où $\nabla v(x + t(y - x)) = 0$ si $x + t(y - x) \in \Gamma^{(K)}$.

■ **Démonstration.** Soient $k \in \mathbf{N}$, $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$, $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, $K > k$ et $x, y \in G$ avec $(x, y) \subset G$ tels que $|(x, y) \cap \Gamma^{(K)}| < \infty$. D'après le début de la démonstration du lemme 3.1,

$$|v(x) - v(y)|^2 \leq \left(\int_0^1 \nabla v(x + s(y - x)) \cdot (y - x) ds + \sum_{j=1}^K \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi)\right)^2$$

G ne rencontre pas les interfaces $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$

$$\leq \left(\int_0^1 \nabla v(x + s(y - x)) \cdot (y - x) ds + \sum_{j=k+1}^K \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi)\right)^2$$

$$(a+b)^2 \leq \frac{(1+\frac{1}{c})a^2}{(1+c)b^2} \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \left(\int_0^1 \nabla v(x + s(y - x)) ds\right)^2 + (1+c) \left(\sum_{j=k+1}^K \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi)\right)^2$$

en décomposant le second membre

$$\leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) |x - y|^2 \left(\int_0^1 \nabla v(x + s(y - x)) ds\right)^2 + (1+c) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(\sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_{k+1}} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi)\right)^2 + (1+c)^2 \left(\sum_{j=k+2}^K \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi)\right)^2.$$

D'après la définition 2.9 de $C_{k,j}$, on a $|(x, y) \cap \Gamma_j| \leq C_{k,j}$, on en déduit en appliquant Cauchy–Schwarz à

la somme intérieure du dernier terme que

$$\left(\sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}(\xi) \right)^2 \leq |(x,y) \cap \Gamma_j| \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}^2(\xi) \leq C_{k,j} \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket_{x,y}^2(\xi)$$

On réitère ce découpage en isolant le terme pour $j = k + 2, k + 3, \dots$ et on obtient le résultat par récurrence. \square

Dans les deux lemmes suivants, nous donnons une majoration des deux termes de l'estimation du lemme 6.1 intégrés sur une boule. Le prochain lemme est démontré dans [KPY22, Lemme 4.2].

Lemme 6.2. Soient $k \in \mathbf{N}$, $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, et $K > k$. Alors,

$$\int_B \int_B |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + t(y - x))|^2 dt dx dy \leq c |B| r_G^2 \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma^{(K)})}^2 \quad \forall v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$$

où $\nabla v(x + t(y - x)) = 0$ si $x + t(y - x) \in \Gamma^{(K)}$, est vérifié pour une constante $c > 0$ ne dépendant que de la dimension d'espace d .

Lemme 6.3. Soient $k \in \mathbf{N}$, $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, et $K \geq j > k$. Alors,

$$\int_B \int_B \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dx dy \leq C |B| r_G \int_{\Gamma_j \cap B} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j, \quad \forall v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega) \quad (6.2)$$

est vraie pour une constante C ne dépendant que de la dimension d de l'espace.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'inégalité de type Poincaré sur les boules incluses dans les cellules de $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, i.e., $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$.

Proposition 6.1. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension d'espace d telle que pour tout $v \in \mathcal{H}$

$$\left\| v - \int_B v dx \right\|_{L^2(B)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c} \right) C r_G \left(r_G \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap B(G, r_G))}^2 \right). \quad (6.3)$$

■ **Démonstration.** On remarque que les quantités 6.3 dépendent continûment de v , donc il suffit de montrer le résultat pour $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$ avant d'utiliser la densité de $\{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega) \mid k \in \mathbf{N}\}$ dans \mathcal{H} (cf. 3.5). Soit $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$,

$$\begin{aligned} \left\| v - \int_B v dx \right\|_{L^2(B)}^2 &= \int_B \left| v(x) - \int_B v(y) dy \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{|B|^2} \int_B \left| \int_B (v(x) - v(y)) dy \right|^2 dx \stackrel{\text{C.-S.}}{\leq} \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |v(x) - v(y)|^2 dy dx \\ &\leq \int_B \int_B |v(x) - v(y)|^2 dy dx. \end{aligned}$$

Le lemme 6.1, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale, nous donne

$$|v(x) - v(y)|^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c} \right) |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + t(y - x))|^2 dt + \left(1 + \frac{1}{c} \right) \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi). \quad (6.4)$$

D'après le lemme 6.2, après avoir divisé par $|B|$,

$$\int_B \int_B |x - y|^2 \int_0^1 |\nabla v(x + t(y - x))|^2 dt dx dy \leq c r_G^2 \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma^{(K)})}^2. \quad (6.5)$$

D'après le lemme 6.3, après avoir divisé par $|B|$ et appliqué Fubini,

$$\int_B \int_B \sum_{\xi \in (x,y) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dy dx \leq C r_G \int_{\Gamma_j \cap B} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j \quad (6.6)$$

où les constantes c et C ne dépendent que de la dimension d'espace d . Finalement, la démonstration est terminée en insérant 6.5 et 6.6 dans 6.4. \square

Lemme 6.4 (Analogie pour les traces sur des sphères). Soient $k \in \mathbf{N}$, $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, and $K > k$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension d'espace d telle que pour tout $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$,

$$\left\| v - \int_B v dx \right\|_{L^2(\partial B)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c} \right) C \left(r_G \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap B)}^2 \right).$$

Les lemmes suivants vont permettre d'étendre le domaine de l'inégalité de Poincaré de boules à des cellules $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Nous commençons par estimer les sauts dans $G \setminus B(G, r_G)$.

Lemme 6.5. Soient $k \in \mathbf{N}$, $B = B(G, r_G) \subset G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, $M = G \setminus B \subset G$ et $K \geq j > k$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$,

$$\int_M \sum_{\xi \in (p_G, y) \cap \Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dy \leq \frac{\gamma^{d-1}}{d} R_G \int_{\Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2 d\Gamma_j.$$

■ **Démonstration.** Supposons sans perte de généralité que $p_G = 0$. Soit $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K \geq j > k$. Étant donné que les interfaces Γ_j sont affines par morceaux, on peut les décomposer en une union dénombrable de composantes affines $\Gamma_{j,i}$ avec $i \in I \subset \mathbf{N}$, i.e.

$$\Gamma_j = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{j,i}.$$

Pour presque tout $y \in M$, l'ensemble $(0, y) \cap \Gamma_j \cap M$ est de cardinal fini et nous posons

$$\sum_{\xi \in (0,y) \cap \Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) = \sum_{i \in I} \varphi_i(y) \quad (6.7)$$

où la fonction φ_i est définie par

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) & \text{si } (0, y) \cap \Gamma_{j,i} \cap M = \xi \in \mathbf{R}^d, \\ 0 & \text{si } (0, y) \cap \Gamma_{j,i} \cap M = \emptyset. \end{cases}$$

On prolonge la fonction φ_i par zéro sur la boule $B(G, R_G) \supset G \supset M$. On en déduit que

$$\int_M \varphi_i(y) dy = \int_{B(G, R_G) \setminus B(G, r_G)} \varphi_i(y) dy = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{R_G} \varphi_i(\Psi(r, s)) r^{d-1} dr ds, \quad (6.8)$$

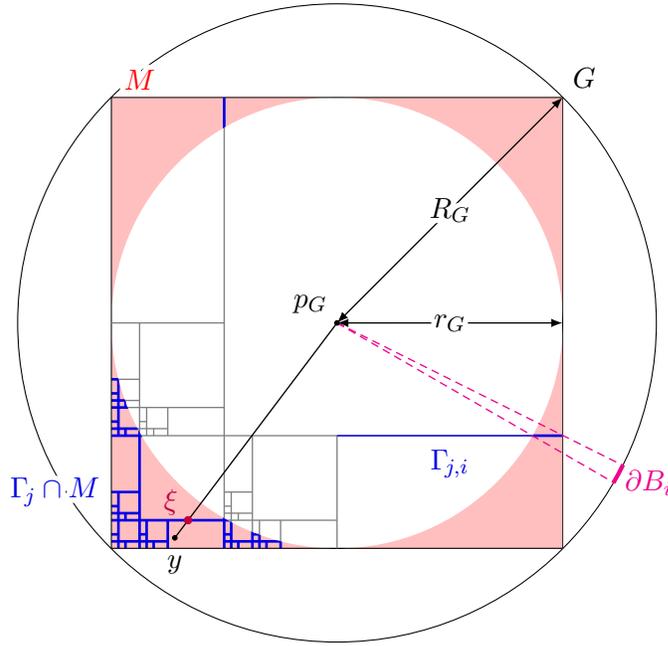


FIGURE 6.4 – Illustration de la démonstration du lemme 6.5

où Ψ est la transformation des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes. Nous cherchons maintenant à estimer 6.8.

Pour cela, on introduit l'ensemble $S_i \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in \mathbb{S}^{d-1} \mid (0, R_G s) \cap \Gamma_{j,i} \cap M \neq \emptyset\}$ des « directions qui contribuent à l'intégrale 6.8 ». On introduit également l'ensemble $\partial B_i = \{R_G s \mid s \in S_i\}$, le sous-ensemble correspondant du bord $\partial B(G, R_G)$.

- Si ces ensembles sont vides ou bien si $\Gamma_{j,i}$ est orthogonal à ∂B_i , *i.e.*, ∂B_i est un singleton, alors l'intégrale 6.8 est nulle.
- Sinon, il existe une paramétrisation explicite $\xi(s) = \Psi(g_i(s)R_G, s)$ de $\Gamma_{j,i} \cap M$ sur ∂B_i par une fonction continue $g_i: \partial B_i \rightarrow]0; 1]$ et par définition

$$0 \leq \varphi_i(\Psi(r, s)) \leq \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)), \quad s \in S_i.$$

Ainsi, on en déduit par intégration que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{R_G} \varphi_i(\Psi(r, s)) r^{d-1} dr ds &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{R_G} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) r^{d-1} dr ds \\ &\leq \frac{1}{d} (R_G^d - r_G^d) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) ds \\ &\leq \frac{1}{d} R_G \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) R_G^{d-1} ds = \frac{1}{d} R_G \int_{S_i} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) R_G^{d-1} ds \\ &= \frac{1}{d} R_G \int_{\partial B_i} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) ds. \end{aligned} \tag{6.9}$$

On admet que l'élément de surface de $\Gamma_{j,i}$ est donné par

$$d\Gamma_{j,i} = g_i^{d-2}(s) \sqrt{g_i^2(s) + |\nabla g_i(s)|^2} R_G^2 ds.$$

On remarque que $g_i(s)R_G \geq r_G$ pour $s \in S_i$ ce qui, avec $R_G \leq \gamma r_G$, implique que

$$1 \leq \gamma g_i(s) \leq \gamma^{d-1} g_i^{d-1}(s) \leq \gamma^{d-1} g_i^{d-2}(s) \sqrt{g_i^2(s) + |\nabla g_i(s)|^2} R_G^2$$

ce qui mène à

$$\int_{\partial B_i} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) \, ds \leq \gamma^{d-1} \int_{\partial B_i} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) g_i^{d-2}(s) \sqrt{g_i^2(s) + |\nabla g_i(s)|^2} R_G^2 \, ds = \gamma^{d-1} \int_{\Gamma_{j,i} \cap M} \llbracket v \rrbracket^2 \, d\Gamma_{j,i}. \quad (6.10)$$

Finalement on déduit de 6.7 que

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{\xi \in (0,y) \cap \Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) \, dy &= \sum_{i \in I} \int_M \varphi_i(y) \, dy \\ \text{par 6.8} &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{R_G} \varphi_i(\Psi(r,s)) r^{d-1} \, dr \, ds \\ \text{par 6.9} &\leq \sum_{i \in I} \frac{1}{d} R_G \int_{\partial B_i} \llbracket v \rrbracket^2(\xi(s)) \, ds \\ \text{par 6.10} &\leq \frac{1}{d} R_G \sum_{i \in I} \gamma^{d-1} \int_{\Gamma_{j,i} \cap M} \llbracket v \rrbracket^2 \, d\Gamma_{j,i} = \frac{\gamma^{d-1}}{d} R_G \int_{\Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2 \, d\Gamma_j, \end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat. □

Le lemme suivant est analogue au lemme 4.1 dans [Ver99].

Lemme 6.6. Soient $k \in \mathbf{N}$, $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ et $K > k$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$ telle que pour tout $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(G)}^2 &\leq \|v\|_{L^2(B(G,r_G))}^2 + CR_G \|v\|_{L^2(\partial B(G,r_G))}^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{c}\right) CR_G \left(R_G \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap (G \setminus B(G,r_G)))}^2 \right). \end{aligned}$$

■ **Démonstration.** Comme $B(G, r_G) \subset G$, on peut écrire

$$\|v\|_{L^2(G)}^2 = \|v\|_{L^2(B(G,r_G))}^2 + \|v\|_{L^2(G \setminus B(G,r_G))}^2.$$

Nous nous concentrons donc sur la majoration du terme $\|v\|_{L^2(G \setminus B(G,r_G))}^2$. Pour alléger les notations, nous posons $M \stackrel{\text{def}}{=} G \setminus B(G, r_G)$ et quitte à faire un changement de variables linéaire, nous supposons sans perte de généralité que $p_G = 0$. Une intégration en coordonnées sphériques permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(M)}^2 &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |v(rs)|^2 \, dr \, ds \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |v(rs) - v(r_G s) + v(r_G s)|^2 \, dr \, ds \\ \text{d'après l'inégalité} &\leq \underbrace{2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |v(rs) - v(r_G s)|^2 \, dr \, ds}_{\stackrel{\text{def}}{=} I_1} + \underbrace{2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |v(r_G s)|^2 \, dr \, ds}_{\stackrel{\text{def}}{=} I_2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nous allons maintenant majorer ces deux intégrales en commençant par I_1 .

(i) **Majoration de I_1 .** D'après le lemme 6.1,

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq 2 \left(1 + \frac{1}{c}\right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |rs - r_G s|^2 \underbrace{\left(\int_0^1 |\nabla v(rs + t(r_G s - rs))| dt \right)^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} I_{1,1}} ds \\
 &\quad + 2 \left(1 + \frac{1}{c}\right) \underbrace{\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \sum_{\xi \in (rs, r_G s) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dr ds}_{\stackrel{\text{def}}{=} I_{1,2}}.
 \end{aligned}$$

(a) **Majoration de $I_{1,1}$.** Par le changement de variable $z = r + t(r_G - r)$, le terme $I_{1,1}$ s'écrit $\left(\int_{r_G}^r |\nabla v(zs)| dz \right)^2$. Majorons son terme associé. En écrivant $|\nabla v(zs)| = z^{(1-d)/2} \times z^{(d-1)/2} |\nabla v(zs)|$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \left(\left| \int_{r_G}^r |\nabla v(zs)| dz \right| \right)^2 dr ds &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \left(\int_{r_G}^r z^{d-1} |\nabla v(zs)|^2 dz \right) \left(\int_{r_G}^r z^{1-d} dz \right) dr ds \\
 &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_{r_G}^{\rho_G(s)} z^{d-1} |\nabla v(zs)|^2 dz \right) \underbrace{\left(\int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \int_{r_G}^r z^{1-d} dz dr \right)}_{(\star)} ds.
 \end{aligned}$$

Estimons le facteur (\star) en distinguant deux cas. On pose $\gamma_G \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_G}{r_G}$.

Cas $d = 2$. On trouve par intégration par parties que $\int r \ln(r) dr = \frac{1}{2} r^2 (\ln(r) - \frac{1}{2})$ et on en déduit que

$$\begin{aligned}
 \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r \int_{r_G}^r z^{-1} dz dr &= \int_{r_G}^{\rho_G(s)} (r \ln(r) - r \ln(r_G)) dr \stackrel{\rho_G(s) < R_G}{\leq} \int_{r_G}^{R_G} (r \ln(r) - r \ln(r_G)) dr \\
 &= \frac{R_G^2}{2} \left(\ln(\gamma_G) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma_G^{-2} \right).
 \end{aligned}$$

Cas $d \geq 3$. Cette fois,

$$\begin{aligned}
 \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \int_{r_G}^r z^{1-d} dz dr &= \int_{r_G}^{\rho_G(s)} \frac{r^{d-1}}{d-2} (r_G^{2-d} - r^{2-d}) dr \\
 &\leq \int_{r_G}^{R_G} \frac{r^{d-1}}{d-2} (r_G^{2-d} - r^{2-d}) dr \\
 &= \frac{1}{d-2} \left(\frac{r_G^{2-d}}{d} (R_G^d - r_G^d) - \frac{1}{2} (R_G^2 - r_G^2) \right)
 \end{aligned}$$

Une estimation détaillée dans [Ver99, p.705] permet de montrer qu'il existe une constante c' ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la constante $\gamma \geq \gamma_G$ telle que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \left| \int_{r_G}^r \nabla v(zs) dz \right|^2 dr ds \leq c' R_G^2 \|\nabla v\|_{M \setminus \Gamma(K)}^2. \quad (6.12)$$

(b) **Majoration de $I_{1,2}$.** Afin d'estimer le terme de saut $I_{1,2}$ en fonction d'intégrales le long d'interfaces, appliquons le lemme précédent 6.5 pour obtenir

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} \sum_{\xi \in (r_G s, rs) \cap \Gamma_j} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dr ds = \int_M \sum_{\xi \in (0,y) \cap \Gamma_j \cap M} \llbracket v \rrbracket^2(\xi) dy \leq \frac{\gamma^{d-1}}{d} R_G \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap M)}^2. \quad (6.13)$$

Les estimations 6.12 et 6.13 mènent à

$$I_1 \leq 2 \left(1 + \frac{1}{c} \right) \left(c' R_G^2 \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})} + \frac{\gamma^{d-1}}{d} R_G \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap M)}^2 \right). \quad (6.14)$$

(ii) **Majoration de I_2 .**

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} |v(r_G s)|^2 dr ds = 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |v(r_G s)|^2 \int_{r_G}^{\rho_G(s)} r^{d-1} dr ds \\ &\quad \rho_G(s) < R_G \quad \forall s \in \mathbb{S}^{d-1} \leq \frac{2}{d} (R_G^d - r_G^d) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |v(r_G s)|^2 ds \\ &= \frac{2r_G}{d} \left(\left(\frac{R_G}{r_G} \right)^d - 1 \right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r_G^{d-1} |v(r_G s)|^2 ds \\ &= \frac{2r_G}{d} \left(\left(\frac{R_G}{r_G} \right)^d - 1 \right) \|v\|_{L^2(\partial B(G, r_G))}^2. \end{aligned}$$

Finalement, cette estimation de I_2 , l'estimation 6.14 et I_1 et la première estimation 6.11 mène au résultat. \square

Comme extension directe du lemme 4.3 dans [Ver99], nous sommes maintenant prêts à énoncer une inégalité locale Poincaré sur les cellules $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$.

Proposition 6.2. *Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour toute cellule $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, l'inégalité de Poincaré locale*

$$\left\| v - \fint_G v dx \right\|_{L^2(G)}^2 \leq C \left(1 + \frac{1}{c} \right) d_k \left(d_k \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right) \quad (6.15)$$

est vérifiée pour tout $v \in \mathcal{H}$ avec une constante C ne dépendant que de la dimension d et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$.

■ **Démonstration.** On remarque que les quantités 6.15 dépendent continûment de v , donc il suffit de montrer le résultat pour $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$ avant d'utiliser la densité de $\{\mathcal{C}_{k,0}^1(\Omega) \mid k \in \mathbf{N}\}$ dans \mathcal{H} (cf. 3.5). On remarque que la fonction constante égale à $\fint_G v dx$ minimise la forme $J: u \in \mathcal{P}_0(\mathbf{R}) \mapsto \|v - u\|_{L^2(G)}^2$. En effet, soit u_0 tel que $J'(u_0) = 0$, ce qui équivaut à $\int_G v(x) dx = \int_G u_0 dx$, soit $u_0 = \fint_G v dx$. On en déduit, en notant $B \stackrel{\text{def}}{=} B(G, r_G)$, que d'après la remarque précédente et le lemme 6.6,

$$\begin{aligned} \left\| v - \fint_G v dx \right\|_{L^2(G)}^2 &\leq \left\| v - \fint_B v dx \right\|_{L^2(G)}^2 \\ &\leq \left\| v - \fint_B v dx \right\|_{L^2(B)}^2 + C(d, \gamma) R_G \left\| v - \fint_B v dx \right\|_{L^2(\partial B)}^2 \\ &\quad + C(d, \gamma) R_G \left(1 + \frac{1}{c} \right) \left(R_G \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap (G \setminus B))}^2 \right). \end{aligned}$$

La proposition 6.1 (pour une fonction $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$) permet de majorer le premier terme et le lemme 6.4

permet de majorer le deuxième. En rassemblant toutes ces estimations, on trouve

$$\begin{aligned} \left\| v - \int_G v \, dx \right\|_{L^2(G)}^2 &\leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) C(d) r_G \left(r_G \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap B)}^2 \right) \\ &\quad + C(d, \gamma) R_G \left(1 + \frac{1}{c}\right) C(d) \left(r_G \|\nabla v\|_{L^2(B \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap B)}^2 \right) \\ &\quad + C(d, \gamma) R_G \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(R_G \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap (G \setminus B))}^2 \right) \end{aligned}$$

Or $B \subset G$, d'où $G \setminus B \subset G$ et donc $\Gamma_j \cap B \subset \Gamma_j \cap G$ et $\Gamma_j \cap (G \setminus B) \subset \Gamma_j \cap G$. De plus, d'après la définition 2.7 de d_k , on a $r_G \leq R_G \leq d_k$ et on trouve ainsi le résultat. \square

6.2 Théorèmes de trace

Afin de contrôler les contributions des sauts dans les estimations de stabilité ci-dessous, nous fournissons quelques **estimations de traces** sur les interfaces Γ_j des fonctions $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec arbitraire $K \in \mathbf{N}$. Pour cela, nous suivons l'approche de Verfürth [Verg9] et utilisons les maillages $\mathcal{T}^{(k)}$. Le lemme suivant est une extension directe du lemme 3.2 de [Verg9] et peut être démontré de manière analogue. Puisque les simplexes $T \in \mathcal{T}^{(k)}$ sont convexes, les contributions de saut supplémentaires peuvent être contrôlées de la même manière que dans le lemme 6.3, voir aussi le théorème 3.6 de [HKP19]. Nous nous référons au lemme 3.2.12 de [Pod22] pour plus de détails. [KPY22]

Lemme 6.7. Soient $k \in \mathbf{N}$, $T \in \mathcal{T}^{(k)}$ et $E \in \mathcal{E}^{(k)}$ une face de T . Alors, il existe une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité σ de $\mathcal{T}^{(k)}$ telle que pour tout $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$,

$$\|v\|_{L^2(E)}^2 \leq c \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(h_k^{-1} \|v\|_{L^2(T)}^2 + h_k \|\nabla v\|_{L^2(T \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap T)}^2 \right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de trace souhaité, démontré dans [KPY22, p. 1465].

Lemme 6.8. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ et $j = 1, \dots, k$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$ telle que pour tout $v \in \mathcal{H}_K$ avec $K > k$,

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_j \cap \partial G)}^2 \leq C \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(d_k^{-1} \|v\|_{L^2(G)}^2 + d_k \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right).$$

Pour davantage de détails, voir la section 3.2.2 de [Pod22].

6.3 Projections sur les espaces k -échelles \mathcal{H}_k

Cette section est consacrée à la construction d'une projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$ de l'espace fractal \mathcal{H} dans l'espace k -échelles \mathcal{H}_k pour $k \in \mathbf{N}$ pour lequel il existe deux constantes $c, c' > 0$ telles que pour tout $v \in \mathcal{H}$,

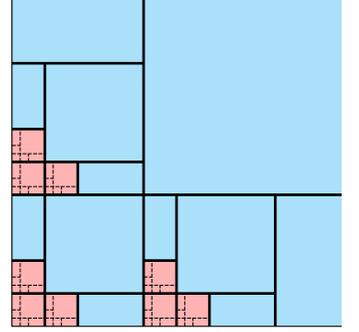
$$\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) c d_k^2 \|v\|^2 \quad \text{et} \quad \|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \leq c' \|v\|. \quad (6.16)$$

La première inégalité assure que $\Pi_{\mathcal{H}_k} v$ est une **approximation convenable** de v , et la deuxième inégalité assure que $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est **stable**.

Définition intuitive de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$. D'après la remarque 2.7, une fonction $v_k \in \mathcal{H}_k$ est H^1 par cellules, *i.e.* pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, la restriction $v_k|_G$ est une fonction de $H^1(G)$. Par contre, en général, pour une fonction $v \in \mathcal{H}$,

$$\begin{cases} v|_G \in H^1(G) & \text{si } G \in \Omega_\infty^{(k)} \\ v|_G \notin H^1(G) & \text{si } G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}. \end{cases}$$

La difficulté vient donc des cellules $\Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$, illustrées en rouge sur la figure ci-contre, sur lesquelles la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ doit approximer $v|_G$ par une fonction de $H^1(G)$ et donc «retirer» tous les sauts au travers des interfaces $\Gamma \cap G$. De plus, nous allons construire $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ de manière à ce qu'il préserve la valeur moyenne de v , *i.e.* $\int_G v \, dx = \int_G \Pi_{\mathcal{H}_k} v \, dx$, ce qui entraînera que $v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v$ est à moyenne nulle et ce qui permettra d'appliquer les inégalités de Poincaré établies dans la section 6.1 pour démontrer les inégalités 6.16.



Définition 6.1 (Projecteur $\Pi_{\mathcal{H}_k}$). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$ de la manière suivante : pour tout $G \in \Omega^{(k)}$ et $v \in \mathcal{H}$,

$$\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G = \begin{cases} \arg \min_{v' \in H^1(G)} \left\{ \|\nabla(v - v')\|_{L^2(G \setminus \Gamma)} \mid \int_G (v - v') \, dx = 0 \right\}, & G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)} \\ v|_G, & G \in \Omega_\infty^{(k)} \end{cases}.$$

Démontrons dans un premier temps que $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est bien défini.

Lemme 6.9 (Une norme équivalente sur $H^1(G)$). Soit $G \in \Omega^{(k)}$. La forme définie par

$$\| \cdot \|_G^2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_G \cdot \, dx \right)^2 + \|\nabla \cdot \|_{L^2(G)}^2$$

est une norme sur $H^1(G)$, équivalente à la norme H^1 classique.

Afin de démontrer ce lemme, nous aurons besoin du résultat suivant, démontré dans l'annexe C.

Lemme 6.10 (Inégalité de Poincaré–Wirtinger, [CLog, p.36]). Soit Ω un ouvert borné et connexe. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_\Omega v(x) \, dx \right)^2 \right).$$

■ **Démonstration (du lemme 6.9).**

- (i) Comme $|G| < \infty$, $v \in L^2(G) \subset L^1(G)$ donc nous pouvons écrire $\|v\|_G^2 = |G|^{-2} \|v\|_{L^1(G)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2$ et on en déduit que $\| \cdot \|_G$ est bien une norme.
- (ii) On rappelle que pour $v \in H^1(G)$, $\|v\|_{H^1(G)}^2 = \|v\|_{L^2(G)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2$. De plus, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\left(\int_G v \, dx \right)^2 \leq \frac{1}{|G|} \|v\|_{L^2(G)}^2,$$

donc on obtient une première inégalité

$$\|v\|_G^2 \leq C_1 \|v\|_{H^1(G)}^2 \quad \text{avec } C_1 = \max \left\{ 1, \frac{1}{|G|} \right\}.$$

La cellule G est un ouvert borné et connexe. Nous pouvons donc appliquer le lemme 6.10 selon lequel il existe une constante C telle que pour tout $v \in H^1(G)$,

$$\|v\|_{L^2(G)}^2 \leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{|G|} \left(\int_G v(x) dx \right)^2 \right),$$

soit, après avoir ajouté $\|\nabla v\|_{L^2(G)}^2$ de part et d'autre, on obtient la deuxième inégalité $\|v\|_{H^1(G)}^2 \leq C_2 \|v\|_G^2$, avec $C_2 = \max\{C, 1\} \max\{|G|, 2\}$.

□

■ **Remarque 6.1.** La projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ tronque toutes les échelles sauf les k premières.

■ **Démonstration (que l'opérateur $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est bien défini).** Soient $v \in \mathcal{H}$ et $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Montrons que l'image $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ est bien définie. Par définition, cette image est solution d'un problème de minimisation que l'on peut réécrire sous la forme

$$\arg \min_{v' \in H^1(G)} \left\{ \|\nabla(v - v')\|_{L^2(G \setminus \Gamma)} \mid \int_G (v - v') dx = 0 \right\} \iff \arg \min_{v' \in \int_G v dx + W} \|\nabla(v - v')\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 \quad (6.17)$$

où $W \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in H^1(G) \mid \int_G w dx = 0\}$. Nous pouvons également écrire

$$\arg \min_{v' \in H^1(G)} \left\{ \|\nabla(v - v')\|_{L^2(G \setminus \Gamma)} \mid \int_G (v - v') dx = 0 \right\} \iff \arg \min_{v' \in H^1(G)} \|v - v'\|_G$$

et appliquer le lemme 6.9.

- (i) L'ensemble des fonctions réalisables $\int_G v dx + W$ est clairement convexe et est de plus fermé en tant que noyau d'une application linéaire.
- (ii) Ainsi, le problème 6.17 est un problème de minimisation d'une fonction strictement convexe sur un domaine convexe et fermé. Il admet donc une unique solution.

□

Montrons que $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est linéaire. Soient $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$.

- (i) Si $G \in \Omega_\infty^{(k)}$ alors, $\Pi_{\mathcal{H}_k}(v_1 + v_2)|_G = (v_1 + v_2)|_G = v_1|_G + v_2|_G = \Pi_{\mathcal{H}_k} v_1|_G + \Pi_{\mathcal{H}_k} v_2|_G$.
- (ii) Si $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. On a immédiatement par l'inégalité triangulaire que $\Pi_{\mathcal{H}_k}(v_1 + v_2)|_G \leq \Pi_{\mathcal{H}_k} v_1|_G + \Pi_{\mathcal{H}_k} v_2|_G$. Je ne suis pas parvenu à obtenir l'autre inégalité.

■ **Remarque 6.2.** Pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a bien $\Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k$.

Notation. Dans la suite nous noterons v_{tr} (comme « tronqué ») la valeur de $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ pour une cellule $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$.

Corollaire 6.1. Soient $v \in \mathcal{H}$ et $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. La projection $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ est solution de la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } v_{\text{tr}} \in W \text{ tel que } b(v_{\text{tr}}, w) = \ell_v(w) \text{ pour tout } w \in W \quad (6.18)$$

où

$$b(w, w') = \int_{G \setminus \Gamma} \nabla w \cdot \nabla w' dx \quad \text{et} \quad \ell_v(w) = \int_{G \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w dx.$$

■ **Démonstration.** On introduit la fonctionnelle

$$J(w) \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla(v-w)\|_{L^2(G)}^2 = b(v, v) + b(w, w) - 2\ell_v(w) \quad \forall w \in W.$$

Par définition, v_{tr} minimise la fonctionnelle J , donc $J(v_{\text{tr}} + tw) - J(v_{\text{tr}}) \geq 0$ pour tout $w \in W$ et tout $t \in \mathbf{R}$. En développant cette identité, on montre que

$$t^2 \|\nabla w\|_{L^2(G)}^2 + 2t(b(v_{\text{tr}}, w) - \ell_v(w)) \geq 0,$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. En divisant par t pour $t > 0$ et $t < 0$ puis en faisant tendre t vers 0, on obtient que le terme entre parenthèses est nul, et on vérifie que v_{tr} est bien solution de 6.18. \square

| **Remarque 6.3.** Revoir la contribution de la composante affine dans l'ensemble des fonctions réalisables.

◆ **Exemple (Meilleure approximation en 1D, [Pod22, p.70]).** On se place dans un domaine 1D $\Omega \subset \mathbf{R}$ et on considère la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ sur une cellule $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. La cellule G , qui est un intervalle, est subdivisée en m sous-intervalles I_1, \dots, I_m par les interfaces Γ_j pour $j > k$. Sur ces intervalles, la restriction $v|_{I_i}$ est une fonction H^1 .

Intuitivement, la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ peut être construite en **translatant les fonctions** $v|_{I_i}$ d'une certaine constante τ_i de manière à ce que $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ soit continu au travers des interfaces Γ_j pour $j > k$ et à ce que $\int_G \Pi_{\mathcal{H}_k} v \, dx = \int_G v \, dx$. \diamond

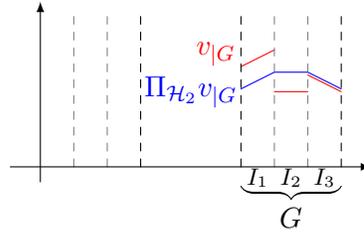


FIGURE 6.5 – Illustration de la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ en dimension 1

Remarque 6.4. Cette stratégie de «recoller» les morceaux $H^1(I_i)$ de $v|_G$ pour obtenir une fonction $H^1(G)$ ne fonctionne plus, en général, en dimension d'espace supérieure. En effet, d'après le théorème 6.15 de [BBH21], pour I un intervalle de \mathbf{R} , on a $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$ mais ceci est faux en dimension supérieure.

Lemme 6.11 (Stabilité locale). Soient $k \in \mathbf{N}$ et $G \in \Omega^{(k)}$, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\int_G (v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v) \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \|\nabla(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}.$$

■ **Démonstration.** Soit $G \in \Omega^{(k)}$.

(i) **Égalité.** D'après la définition 6.1 de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$, si $G \in \Omega_\infty^{(k)}$ alors $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G = v|_G$ et sinon, $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G$ est tel que $\int_G (v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v) \, dx = 0$, ce qui montre l'égalité pour tout $G \in \Omega^{(k)}$.

(ii) **Inégalité.** En insérant $w = \Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G - \int_G v \, dx$ dans 6.18, (on a bien $w \in W$), on a, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\|\nabla(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G)}^2 = (\nabla v, \nabla(\Pi_{\mathcal{H}_k} v))_{L^2(G \setminus \Gamma)} \leq \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)} \|\nabla(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma)},$$

ce qui démontre la stabilité locale après simplification.

□

Énonçons maintenant une propriété d'approximation de la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ qui est une **conséquence de l'inégalité de Poincaré locale sur les cellules** $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ énoncée dans le lemme 6.2.

Théorème 6.1 (Approximation). *Nous supposons que la géométrie des interfaces Γ vérifie la condition*

$$r_k(1+c)^{-k} \leq d_k. \quad (6.19)$$

Alors, les projections $\Pi_{\mathcal{H}_k}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$ pour $k \in \mathbf{N}$ sont telles qu'il existe une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité γ du maillage $\Omega^{(k)}$ telle que

$$\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

■ **Démonstration.** Soient $v \in \mathcal{H}$ et $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. D'après le lemme 6.11, la fonction $v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v$ est à valeur moyenne nulle et comme la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k} v$ est à valeurs dans \mathcal{H}_k , ses sauts au travers des interfaces Γ_j pour $j \geq k+1$ sont nuls. Ainsi, d'après l'inégalité locale de type Poincaré énoncée dans la proposition 6.2,

$$\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G)}^2 \leq c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k \left(d_k \|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right) \quad (6.20)$$

avec une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité γ du maillage $\Omega^{(k)}$. L'hypothèse 6.19 et la définition 2.11 de r_k entraînent que pour $j \geq k+1$,

$$(1+c)^{-k} C_{k,j} \leq r_k(1+c)^{-k} C_j \leq d_k C_j. \quad (6.21)$$

Ces inégalités permettent d'établir la majoration suivante

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \leq d_k \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2,$$

et d'après la propriété de stabilité locale de la projection établie, énoncée dans le lemme 6.11, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 \leq 4 \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G)}^2 &\leq c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \left(4 \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2\right) \\ &\leq 4c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \left(\|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2\right) = c' \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \|v\|_{L^2(G)}^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Étant donné que $\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G)} = 0$ pour tout $G \in \Omega_\infty^{(k)}$, une somme de 6.22 sur $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ termine la démonstration. □

Montrons que l'opérateur de projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est borné. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.12 ([Pod22] p.72). *Soient V un espace de Banach et $P: V \rightarrow V$ une projection. Si $\text{Ker } P$ et $\text{Im } P$ sont fermés, alors P est continu.*

■ **Démonstration.** Nous allons montrer que le graphe de P est fermé ce qui entraînera la continuité de P d'après le théorème du graphe fermé.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans V telle que $v_n \rightarrow v \in V$ et $Pv_n \rightarrow w$. On souhaite montrer que $w = Pv$. On remarque que $v_n - Pv_n \in \text{Ker } P$ car $P(v_n - Pv_n) = Pv_n - Pv_n = 0$, et que $v_n - Pv_n \rightarrow v - w$. Comme $\text{Ker } P$ et $\text{Im } P$ sont fermés par hypothèse, on en déduit que

$$v - w \in \text{Ker } P \quad \text{et} \quad w \in \text{Im } P.$$

Ainsi, on a $P(v - w) = Pv - Pw = 0$ et donc $Pv = Pw = w$ puisque $Pu = u$ pour tout $u \in \text{Im } P$. Finalement, le graphe de P est fermé puisque $Pv_n \rightarrow w = Pv$. L'application du théorème du graphe fermé donne le résultat. \square

Lemme 6.13 ($\Pi_{\mathcal{H}_k}$ borné). *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'opérateur linéaire de projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est borné, i.e., il existe une constante $\mu_k > 0$ telle que pour tout $v \in \mathcal{H}$,*

$$\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \leq \mu_k \|v\|.$$

■ **Démonstration.** L'image $\text{Im } \Pi_{\mathcal{H}_k} = \mathcal{H}_k$ de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est un sous-espace complet de \mathcal{H} et est donc fermée. Montrons que $\text{Ker } \Pi_{\mathcal{H}_k}$ est également fermé, ce qui donnera le résultat en vertu du lemme précédent.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\text{Ker } \Pi_{\mathcal{H}_k}$ convergeant vers $v \in \mathcal{H}$, montrons que $v \in \text{Ker } \Pi_{\mathcal{H}_k}$.

- (i) Soit $G \in \Omega_\infty^{(k)}$. D'après la définition 6.1 de la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $v_n|_G = (\Pi_{\mathcal{H}_k} v_n)|_G \equiv 0$ et donc $(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)|_G \equiv 0$.
- (ii) Soient $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$ et $n \in \mathbf{N}$. Le fait que $(\Pi_{\mathcal{H}_k} v_n)|_G \equiv 0$ entraîne que $\int_G v_n dx = 0$ et donc que $\int_G v dx = 0$. De plus, d'après l'égalité variationnelle 6.18,

$$\int_{G \setminus \Gamma} \nabla v_n \cdot \nabla w dx = 0 \quad \forall w \in W.$$

Ainsi, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$, on montre que

$$\int_{G \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w dx = 0 \quad \forall w \in W$$

car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la norme sur \mathcal{H} ,

$$\left| \int_{G \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w dx - \int_{G \setminus \Gamma} \nabla v_n \cdot \nabla w dx \right|^2 \leq \|\nabla(v - v_n)\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 \|\nabla w\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2 \leq \underbrace{\|v - v_n\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \|\nabla w\|_{L^2(G \setminus \Gamma)}^2.$$

Par définition et par la corollaire 6.1, $v_{k,G} \stackrel{\text{def}}{=} (\Pi_{\mathcal{H}_k} v)|_G$ vérifie les équations

$$\int_G (v_{k,G} - v) dx = \int_G v_{k,G} dx = 0, \quad \int_{G \setminus \Gamma} \nabla v_{k,G} \cdot \nabla w dx = \int_{G \setminus \Gamma} \nabla v \cdot \nabla w dx = 0 \quad w \in W$$

dont l'unique solution est $v_{k,G} \equiv 0$.

Finalement, $(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)|_G \equiv 0$ pour tout $G \in \Omega^{(k)}$ i.e. $v \in \text{Ker } \Pi_{\mathcal{H}_k}$ et ainsi la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est bornée. \square

Afin d'identifier une condition suffisante pour la stabilité uniforme de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$, nous allons étudier la dépendance de μ_k en fonction de $k \in \mathbf{N}$. À cette fin, nous établissons une borne des contributions des sauts de $\Pi_{\mathcal{H}_k} v$ en fonction de $\|v\|$.

Lemme 6.14. *Soit $k \in \mathbf{N}$ et supposons que les conditions 5.3 et 6.19 sont satisfaites. Alors, il existe une constante C dépendant seulement de la dimension d'espace d et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$ telle que pour tout $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$, on a l'estimation suivante de la contribution des sauts de*

$\Pi_{\mathcal{H}_k} v$ en fonction de $\|v\|$

$$\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq C \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j\right) \|v\|^2.$$

■ **Démonstration.** Soient $k \in \mathbf{N}$ et $v \in C_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K > k$. On remarque que par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, pour $j = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 &= \sum_{G \neq G' \in \Omega^{(k)}} \int_{\Gamma_j \cap \partial G \cap \partial G'} ((v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)|_G - (v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)|_{G'})^2 d\Gamma_j \\ &\leq 4 \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Gamma_j \cap \partial G)}^2. \end{aligned} \quad (6.23)$$

D'après la définition 6.1 de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$, pour $G \in \Omega_\infty^{(k)}$, on a $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G = v|_G$ et donc $\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Gamma_j \cap \partial G)}^2 = 0$. Nous considérons donc une cellule $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. En insérant 6.21 $((1+c)^{-k} C_{k,j} \leq r_k (1+c)^{-k} C_j \leq d_k C_j)$ dans la propriété d'approximation locale 6.20, on obtient, avec $c = c(d, \gamma)$,

$$\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G)}^2 \leq c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \left(\|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right). \quad (6.24)$$

On remarque que $\Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k$, le saut $\llbracket \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket$ est nul au travers de Γ_j pour $j > k$ et donc d'après le lemme 6.8, il existe une constante $C = C(d, \gamma)$ telle que

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Gamma_j \cap \partial G)}^2 &\leq C \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left[d_k^{-1} \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G)}^2 + d_k \|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^{j-k} C_{k,j} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right] \\ \text{par 6.24} \quad &\leq C \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left[d_k^{-1} c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k^2 \underbrace{\left\{ \|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 \right\}}_{(*)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right] + d_k \underbrace{\|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2}_{(*)} \\ &\quad \left. + \sum_{j=k+1}^K \underbrace{(1+c)^{j-k} C_{k,j}}_{\leq d_k (1+c)^j C_j \text{ (cf. 6.21)}} \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right] \end{aligned}$$

par C.–S. et le lemme 6.11, $(*) \leq 2 \left(\|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \|\nabla \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 \right) \leq 4 \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2$ et $(1 + \frac{1}{c}) \geq 1$

$$\leq C \max\{c, 1\} \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 d_k \left[4 \|\nabla v\|_{L^2(G \setminus \Gamma^{(K)})}^2 + \sum_{j=k+1}^K (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j \cap G)}^2 \right].$$

Finalement, en sommant sur $G \in \Omega^{(k)}$, d'après 6.23,

$$\|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq C' \left(1 + \frac{1}{c}\right)^2 d_k \|v\|^2$$

avec $C' = 4C \max\{c, 1\} = C'(d, \gamma)$ et on en déduit le résultat final. \square

Nous pouvons maintenant montrer la stabilité de l'opérateur $\Pi_{\mathcal{H}_k}$.

Théorème 6.2 (Stabilité de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$). *On suppose que les hypothèses 6.19 : $r_k(1+c)^{-k} \leq d_k$ et 5.3 il existe $\delta > 0$ tel que $\delta d_k \leq h_k \leq d_k$ sont satisfaites. Alors les projections $\Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k$ pour $k \in \mathbf{N}$ sont stables dans le sens où*

$$\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\|^2 \leq c \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c} \right)^3 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{H} \quad (6.25)$$

est vérifiée pour tout $k \in \mathbf{N}$ avec une constante c ne dépendant que de la dimension d d'espace et de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$.

■ **Démonstration.** Comme $\mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K \in \mathbf{N}$ est dense dans \mathcal{H} et que la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est continue (cf. lemme 6.13) pour tout $k \in \mathbf{N}$, il suffit de montrer 6.25 pour une fonction $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ avec $K \geq k$. Par l'inégalité triangulaire,

$$\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \leq \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\| + \|v\|, \quad (6.26)$$

de sorte qu'il suffit d'estimer le terme $\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|$. Par construction, la fonction $v \in \mathcal{C}_{K,0}^1(\Omega)$ ne saute pas au travers des interfaces Γ_j pour $j > K$ et la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k$ ne saute pas au travers des interfaces Γ_j pour $j > k$. Ainsi, par définition de la norme $\|\cdot\|$,

$$\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|^2 = \|\nabla(v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \left(1 + \frac{1}{c} \right) \sum_{j=1}^K (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2$$

$$\begin{aligned} & \text{d'après C.-S. et par} \\ & \text{linéarité du saut et les} \\ & \text{remarques précédentes} \\ & \leq 2 \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 + \underbrace{\|\nabla \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2}_{\leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2 \text{ (cf. lemme 6.11)}} \right) + \left(1 + \frac{1}{c} \right) \sum_{j=k+1}^K (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \end{aligned}$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{c} \right) \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2$$

$$\begin{aligned} & \text{en sommant à partir} \\ & \text{de } j=1 \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \text{ somme } \leq 4\|v\|^2 + \left(1 + \frac{1}{c} \right) \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2. \\ & \text{et en la multipliant par 4} \end{aligned}$$

De plus, nous pouvons estimer le deuxième terme de la majoration précédente grâce au lemme 6.14 selon lequel il existe une constante $C = C(d, \gamma)$ telle que

$$\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq C \left(1 + \frac{1}{c} \right)^2 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \|v\|^2.$$

Finalement, en rassemblant les estimations et l'inégalité triangulaire 6.26,

$$\begin{aligned} \|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\|^2 & \leq 2(\|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|^2 + \|v\|^2) \\ & \leq 8\|v\|^2 + 2C \left(1 + \frac{1}{c} \right)^3 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \|v\|^2 + 2\|v\|^2 \\ & \leq \max\{10, 2C\} \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c} \right)^3 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|v\|^2 \end{aligned}$$

□

Finalement, la stabilité uniforme de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ est obtenue sous une condition supplémentaire sur la géométrie du réseau d'interfaces Γ , à savoir que d_k compense les facteurs exponentiels dans l'énoncé du théorème 6.2.

Corollaire 6.2. On suppose que les hypothèses 6.19 : $r_k(1+c)^{-k} \leq d_k$ et 5.3 il existe $\delta > 0$ tel que $\delta d_k \leq h_k \leq d_k$ sont satisfaites ainsi que la condition

$$d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \leq C_\Gamma, \quad k \in \mathbf{N} \quad (6.27)$$

pour une constante C_Γ indépendante de k . Alors les projections $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ pour $k \in \mathbf{N}$, sont uniformément stable, i.e.

$$\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \leq c \|v\| \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$ et avec une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d , de la régularité γ de $\Omega^{(k)}$ et de la constante de matériau c .

■ **Démonstration.** D'après le théorème précédent 6.2, il existe une constante $c' = c'(d, \gamma)$ telle que pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\|^2 \leq c' \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3 d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|v\|^2 \leq c' \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3 C_\Gamma \right) \|v\|^2$$

soit $c = \sqrt{c' \left(1 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3 C_\Gamma \right)} = c(d, \gamma, c)$. □

Remarque 6.5 ([Pod22, Remark 3.2.26, p.75]). Pourquoi la condition 6.27 est-elle nécessaire? Peut-on trouver une constante $c_\ell > 0$ telle que

$$\| [v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v] \|_{L^2(\Gamma_\ell)} \stackrel{?}{\leq} \| [v] \|_{L^2(\Gamma_\ell)}$$

ce qui permettrait de s'affranchir de cette condition. Cependant, trouver une telle estimation est impossible comme le montre le contre-exemple suivant.

◆ **Contre-exemple .** On reprend l'exemple 6.5 dans le cas particulier où $G =]0; 1[\subset \mathbf{R}$ est subdivisé en $I_1 =]0; x_1[$, $I_2 =]x_1; x_2[$ et $I_3 =]x_2; 1[$ avec $x_1 < x_2$. On considère la fonction constante par morceaux $v|_G$ avec $v \in \mathcal{H}$ telle que

$$v|_{I_1} = 0, \quad v|_{I_2} = \alpha \neq 0, \quad v|_{I_3} = 0.$$

Alors, $\Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G = (x_2 - x_1)\alpha \neq 0$ et

$$0 < \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\partial G)} \not\leq c_\ell \|v\|_{L^2(\partial \Omega)} = 0.$$

Cette construction peut être étendue en dimension d'espace supérieure.

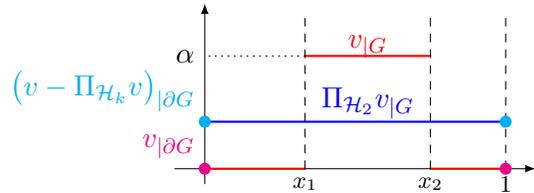


FIGURE 6.6 – Illustration du contre-exemple

◆

Ainsi, la condition 6.27 est une conséquence du fait que les contributions des sauts de $\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\|$ ne peuvent pas être majorées par les seules contributions de saut de $\|v\|$. Cette condition impose au réseau d'interfaces d'être « **fortement localisé** », comme celui de l'exemple 2.3. Cette condition exclut par exemple le réseau présenté dans [Pod22, Example 3.2.27, p.75].

Pour une géométrie d'interface donnée,

$$\begin{cases} \text{condition 6.27} & \implies \text{majoration de } c, \\ \text{condition 6.19} & \implies \text{minoration de } c. \end{cases}$$

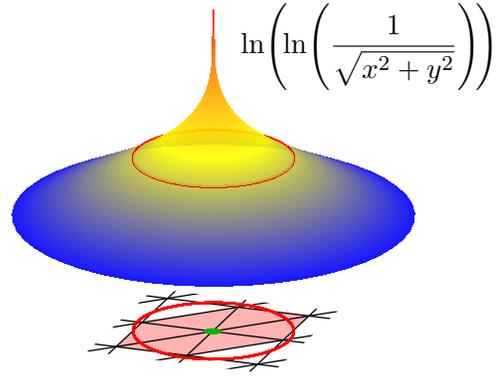
Ainsi, la stabilité de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ nécessite des **hypothèses fortes sur la localité du réseau d'interface** Γ .

6.4 Opérateur de quasi-interpolation $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$

L'objectif de cette section est d'introduire des projections $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$ pour $k \in \mathbf{N}$ qui approximent les fonctions de l'espace fractal \mathcal{H} par des fonctions bien choisies de l'espace d'éléments finis \mathcal{S}_k .

Nous introduisons $\Pi_{\mathcal{S}_k}$, un *opérateur d'interpolation*, d'un type similaire à l'*interpolateur de Clément*, aux nœuds du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$, pour les éléments finis \mathbb{P}_1 . Il existe plusieurs façons de définir un tel opérateur d'interpolation, en vue de son utilisation dans la méthode LOD. Il permet d'affecter des valeurs aux nœuds « naturelles » pour une fonction $v \in \mathcal{H}_k$ qui, *stricto sensu*, n'en a pas puisqu'elle n'est pas nécessairement continue, sauf en dimension $d = 1$. L'idée mise en œuvre pour définir $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ est astucieuse et élémentaire : moyenner la fonction sur les mailles partageant le nœud considéré comme sommet pour obtenir la valeur au dit nœud [BL22, p.366]. La figure 6.7 illustre une fonction H^1 discontinue en un point.

FIGURE 6.7 – Fonction H^1 discontinue en un point



Comme l'interpolation nodale **perd ses propriétés d'approximation dans les dimensions d'espace supérieures**, les coefficients des fonctions de base des éléments finis sont déterminés par une moyenne locale de type Clément. Cet opérateur de type Clément est choisi de telle sorte qu'il « lisse » les sauts à travers les interfaces Γ_j , qu'il soit calculable en pratique et qu'il satisfasse aux propriétés d'approximation et de stabilité de la forme

$$\|v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) c h_k^2 \|v\|^2 \quad \text{et} \quad \|\Pi_{\mathcal{S}_k} v\| \leq c' \|v\|$$

pour tout $v \in \mathcal{H}$ avec des constantes appropriées $c, c' > 0$. [Pod22, Sec.3.2.4, p.76]

Définition 6.2 (Définition générale [Pod22, Déf. 3.2.28]). Soit $k \in \mathbf{N}$, la projection de type Clément $\Pi_{\mathcal{S}_k} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$ est définie par

$$\Pi_{\mathcal{S}_k} v = \sum_{p \in \mathcal{N}^k} (\Pi_{\omega_p} v) \lambda_p^{(k)}, \quad (6.28)$$

où $\omega_p = \text{supp } \lambda_p^{(k)}$ avec $p \in \mathcal{N}^{(k)}$ et $\Pi_{\omega_p} : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathbf{R}$ satisfait aux propriétés

- (P1) Π_{ω_p} est linéaire ;
- (P2) Π_{ω_p} est l'identité pour les fonctions constantes ;
- (P3) il existe une constante $c = c(d, \sigma)$ telle que pour tout $v \in \mathcal{H}$ et pour tout patch ω_p avec $p \in \mathcal{N}^{(k)}$,

$$\|\Pi_{\omega_p} v\|_{L^2(\omega_p)} \leq c \|v\|_{L^2(\omega_p)}.$$

Il existe différents opérateurs locaux vérifiant les propriétés (P1)–(P3). Nous considérerons le suivant.

Définition 6.3 (Projecteur $\Pi_{\mathcal{S}_k}$). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la quasi-interpolation de type Clément $\Pi_{\mathcal{S}_k}: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{S}_k$ par

$$\Pi_{\mathcal{S}_k} v = \sum_{p \in \mathcal{N}^{(k)}} (\Pi_p v) \lambda_p^{(k)} \quad (6.29)$$

avec $\Pi_p: \mathcal{H}_k \rightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$\Pi_p v = \int_{\omega_p} v \, dx, \quad \omega_p = \text{supp } \lambda_p^{(k)}, \quad p \in \mathcal{N}^{(k)}, \quad \text{pour } v \in \mathcal{H}_k.$$

Pour une fonction $v \in \mathcal{H}_k$, les restrictions $v|_G$ aux cellules $G \in \Omega^{(k)}$ sont dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(G)$ (cf. 2.1). Ainsi, la projection $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ vérifie des propriétés d'approximation et de stabilité locale, comme cela est montré dans [Caro6 ; Vergg].

Lemme 6.15. Soient $k \in \mathbf{N}$, $G \in \Omega^{(k)}$, $T \in \mathcal{T}_G^{(k)} \subset \mathcal{T}^{(k)}$, et $E \in \mathcal{E}^{(k)}$ tel que $E \subset \overline{G}$. La projection $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ définie par 6.29 vérifie les propriétés d'approximation locale

$$\|v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(T)}^2 \leq c h_k^2 \sum_{p \in T \cap \mathcal{N}_G^{(k)}} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_p)}^2, \quad (6.30)$$

$$\int_E |v|_G - \Pi_{\mathcal{S}_k} v|_G|^2 \, dE \leq c \sum_{p \in \mathcal{N}_E} h_k \|\nabla v|_G\|_{L^2(\omega_p)}^2, \quad (6.31)$$

et de stabilité locale

$$\|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(G)}^2 \leq c \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 \quad (6.32)$$

pour tout $v \in \mathcal{H}_k$ avec une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité σ du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$. Les ensembles $\mathcal{N}_G^{(k)}$ et \mathcal{N}_E sont définis respectivement par 5.1 et par l'ensemble des sommets situés sur l'arête E .

Proposition 6.3 (Approximation locale). Soient $k \in \mathbf{N}$ et $G \in \Omega^{(k)}$. La projection $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ définie par 6.29 a la propriété d'approximation locale

$$\|v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(G)} \leq c h_k \|\nabla v\|_{L^2(G)} \quad \forall v \in \mathcal{H}_k$$

avec c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité σ du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$.

Proposition 6.4. Les projections $\Pi_{\mathcal{S}_k}$, pour $k \in \mathbf{N}$, définies par 6.29, sont stables dans le sens où

$$\|\Pi_{\mathcal{S}_k} v\|^2 \leq c \left(1 + d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{H}_k$$

avec c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité σ du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$.

■ **Démonstration.** Soit $v \in \mathcal{H}_k$, on remarque que

$$\begin{aligned}
 \|\Pi_{\mathcal{S}_k} v\|^2 &= \|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \\
 \text{par linéarité du saut} &\leq \|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 + 2 \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 + 2 \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \\
 \text{et C.-S. dans } \mathbf{R}^2 & \\
 +2\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 &\leq 2\|v\|^2 + \underbrace{\|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2}_{(a)} + 2 \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \underbrace{\|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2}_{(b)} \quad (6.33)
 \end{aligned}$$

(i) **Majoration de (a).** En utilisant la stabilité locale 6.32 de la projection $\Pi_{\mathcal{S}_k}$, il existe une constante c ne dépendant que de la dimension d'espace d et de la régularité σ du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$ telle que

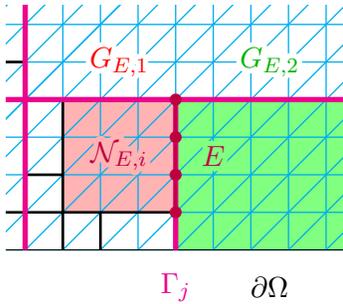
$$\|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(G)}^2 \leq c \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 = c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 \leq c \|v\|^2. \quad (6.34)$$

(ii) **Majoration de (b).** Comme le maillage $\mathcal{T}^{(k)}$ est adapté au réseau d'interfaces $\Gamma^{(k)}$, d'après 5.2, il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}_\ell^{(k)}$ des arêtes du maillage $\mathcal{E}^{(k)}$ tel que

$$\Gamma_j = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_j^{(k)}} E, \quad \text{pour } j = 1, \dots, k, \quad \text{ce qui permet d'écrire } \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_j^{(k)}} \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(E)}^2.$$

Soit $E \subset \overline{G_{E,1}} \cap \overline{G_{E,2}} \subset \Gamma_j$ avec $G_{E,i} \in \Omega^{(k)}$ et on pose $v_i = v|_{G_{E,i}}$ pour $i = 1, 2$. Alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbf{R}^2 ,

$$\|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(E)}^2 = \int_E \llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket^2 dE \leq 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_j^{(k)}} \int_E \left[|v_1 - \Pi_{\mathcal{S}_k} v_1|^2 + |v_2 - \Pi_{\mathcal{S}_k} v_2|^2 \right] dE. \quad (6.35)$$



La propriété d'approximation locale 6.31 mène à

$$\int_E |v_i - \Pi_{\mathcal{S}_k} v_i|^2 dE \leq c \sum_{p \in \mathcal{N}_{E,i}} h_k \|\nabla v_i\|_{L^2(\omega_p)}^2, \quad \text{pour } i = 1, 2$$

où $\mathcal{N}_{E,i} = E \cap \mathcal{N}_{G_{E,i}}^{(k)}$ désigne les sommets de E situés sur $\overline{G_{E,i}}$ et où c dépend que de la dimension d'espace d et de la régularité σ du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$. En insérant cette majoration

dans 6.35 et en sommant sur $E \in \mathcal{E}_j^{(k)}$, on obtient

$$\|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq 2c h_k \sum_{E \in \mathcal{E}_j^{(k)}} \left[\sum_{p \in \mathcal{N}_{E,1}} \|\nabla v_1\|_{L^2(\omega_p)}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N}_{E,2}} \|\nabla v_2\|_{L^2(\omega_p)}^2 \right].$$

En multipliant cette inégalité par $(1+c)^j C_j$ et en sommant sur $j = 1, \dots, k$ on obtient, à un facteur près

$$\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|\llbracket v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v \rrbracket\|_{L^2(\Gamma_j)}^2 \leq c h_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2. \quad (6.36)$$

D'après la régularité du maillage $\mathcal{T}^{(k)}$ 5.3, on a $h_k \leq d_k$ et la première estimation 6.33 devient, en utilisant 6.36, 6.34 et le fait que $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma^{(k)})}^2 \leq \|v\|^2$,

$$\|\Pi_{\mathcal{S}_k} v\|^2 \leq 2 \left(1 + c + c d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|v\|^2. \quad (6.37)$$

Nous n'obtenons cependant pas exactement la forme de l'inégalité attendue. \square

Remarque 6.6. La stabilité uniforme de $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ pour $k \in \mathbf{N}$ est obtenue sous l'hypothèse supplémentaire 6.27.

6.5 Opérateur final $\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k}$

Définition 6.4 (Projecteur Π_k). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit la projection

$$\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k. \quad (6.38)$$

Interprétation de Π_k [KPY18, p.2767].

1. Dans un premier temps, la fonction donnée $u \in \mathcal{H}$ est localement, sur les éléments uniques $t \in \mathcal{T}$, approximée par sa projection L^2 -orthogonale sur l'espace de fonctions linéaires, quelle que soit la continuité à travers les frontières des éléments.
2. Dans un deuxième temps, les valeurs de ces approximants en un sommet à l'intérieur du domaine sont remplacées par une moyenne pondérée, en fonction de la contribution des éléments impliqués à l'aire ou au volume de leur union. Les valeurs aux sommets de la frontière sont définies à zéro.

Hypothèses. Rappelons que nous nous plaçons dans le cadre suivant d'hypothèses sur la géométrie du problème. Soit $k \in \mathbf{N}$,

- (i) il existe une constante $\delta > 0$ indépendante de k telle que

$$\delta d_k \leq h_k \leq d_k; \quad (6.39)$$

- (ii) $r_k (1+c)^{-k} \leq d_k;$ (6.40)

- (iii) il existe une constante C_Γ indépendante de k telle que

$$d_k \left(\sum_{\ell=1}^k (1+c)^\ell C_\ell \right) \leq C_\Gamma. \quad (6.41)$$

Théorème 6.3 (Approximation). On suppose que les hypothèses 6.39, 6.40 et 6.41 sont satisfaites. Alors il existe une constante c ne dépendant que de la

- dimension d'espace d ,
- régularité γ de $\Omega^{(k)}$,
- régularité σ de $\mathcal{T}^{(k)}$,
- constante δ dans 6.39,
- constante C_Γ dans 6.41,
- constante de matériau c

telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\|v - \Pi_k v\|_{L^2(\Omega)} \leq c h_k \|v\| \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (6.42)$$

■ **Démonstration.** Cette estimation est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire. En insérant $\Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k$ dans $\|v - \Pi_k v\|_{L^2(\Omega)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_k v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|v - \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_{\mathcal{H}_k} v - \Pi_{S_k}(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)\|_{L^2(\Omega)} & (6.43) \\ &\stackrel{\substack{\text{théorème 6.1 d'appro-} \\ \text{ximation de } \Pi_{\mathcal{H}_k} \\ + \text{propriété 6.3 d'appro-} \\ \text{ximation locale de } \Pi_{S_k}}}{\leq} \sqrt{c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k} \|v\| + ch_k \|\nabla \Pi_{\mathcal{H}_k} v\|_{L^2(\Omega)} \\ \forall v \in \mathcal{H}, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|v\| \leq \sqrt{c \left(1 + \frac{1}{c}\right) d_k} \|v\| + ch_k \|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \\ &\stackrel{\substack{\text{corollaire 6.2 de stabilité} \\ \text{uniforme de } \Pi_{\mathcal{H}_k} + 6.39}}{\leq} \left(\sqrt{c \left(1 + \frac{1}{c}\right) \frac{h_k}{\delta}} + cc'(d, \gamma, c) h_k \right) \|v\| \end{aligned}$$

□

| **Remarque 6.7.** Le théorème d'approximation précédent 6.3 fournit une convergence en h_k .

Finalement, le théorème suivant fournit un résultat de stabilité uniforme des projections Π_k .

Théorème 6.4 (Stabilité uniforme). *On suppose que les hypothèses 6.39, 6.40 et 6.41 sont satisfaites. Alors il existe une constante c ne dépendant que de la*

- dimension d'espace d ,
- régularité γ de $\Omega^{(k)}$,
- régularité σ de $\mathcal{T}^{(k)}$,
- constante δ dans 6.39,
- constante C_Γ dans 6.41,
- constante de matériau c

telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\|\Pi_k v\| \leq c \|v\| \quad \forall v \in \mathcal{H}. \quad (6.44)$$

■ **Démonstration.** Soit $v \in \mathcal{H}$. D'après la proposition 6.4 appliquée à la fonction $\Pi_{\mathcal{H}_k} v \in \mathcal{H}_k$, il existe une constante $c = c(d, \sigma)$ telle que

$$\|\Pi_{S_k}(\Pi_{\mathcal{H}_k} v)\| = \|\Pi_k v\| \leq c \left(1 + d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) \|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\|$$

et en appliquant le corollaire 6.2 selon lequel il existe $c' = c'(d, \gamma, c)$ telle que $\|\Pi_{\mathcal{H}_k} v\| \leq c' \|v\|$, on obtient le résultat

$$\|\Pi_k v\| \leq c \left(1 + d_k \left(\sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \right) \right) c' \|v\| \leq cc'(1 + C_\Gamma) \|v\|.$$

□

Troisième partie

Méthodes d'homogénéisation numérique

Résumé

Maintenant que l'existence d'opérateurs de projection vérifiant des propriétés de stabilité et d'approximation (*cf.* 6.1) a été établie dans le cas des réseaux d'interfaces fractals, nous nous intéressons à la construction de **méthodes numériques rapides et efficaces** pour résoudre le problème **PiF**.

- (I) Premièrement, nous construirons une approche de type « **LOD** » introduite par Målqvist et Peterseim [MP13]. Un avantage clé de ces méthodes est que la partie coûteuse en calcul, *i.e.* l'**assemblage** de la base d'éléments finis multi-échelles et de la matrice de rigidité correspondante, peut être traitée dans une étape *offline* et réutilisée pour différents termes sources. La discrétisation multi-échelles associée fournit des **estimations d'erreur de discrétisation a posteriori optimales**.
- (II) Nous nous intéressons ensuite à la construction et à l'analyse de convergence des méthodes de *subspace correction* pour le problème général **PiF**, ainsi qu'à des versions discrètes réalisables par calcul pour les approximations d'éléments finis à l'échelle k **FEMPiF_k**.
- (III) Nous présentons dans le dernier chapitre les expériences numériques réalisées par Kornhuber, Podlesny et Yserentant dans [KPY22] sur deux géométries fractales différentes et montrer que la méthode employée est robuste à la géométrie du réseau d'interfaces.

Chapitre 7

La méthode LOD, une méthode d'éléments finis multi-échelles

7.1 Un mot sur les méthodes d'éléments finis multi-échelles (EFMe) [Alo, sec. 6.3]

Objectif. Approximer des solutions très oscillantes, à une échelle ε , avec un maillage de pas $h \gg \varepsilon$.

L'idée de la méthode EFMe est de précalculer des fonctions de base oscillantes. Nous considérons un maillage \mathcal{T}_h et les fonctions de base \mathbb{P}_1 classiques $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$. Résoudre la formulation variationnelle discrète dans l'espace discret $V_h = \text{Vect}\{\phi_i\}$ ne permet pas d'obtenir de bonnes estimations d'erreur car, *moralement*, les fonctions de base ϕ_i ne capturent pas les oscillations. L'idée de la méthode EFMe est donc de résoudre la même formulation variationnelle mais cette fois avec une nouvelle base de fonctions qui parviennent à capturer les oscillations du problème. Cette méthode présente quelques difficultés d'un point de vue pratique :

- (i) Le calcul des fonctions de base ψ_i sur chaque triangle nécessite un maillage plus fin, capable de capturer les oscillations, et donc d'un pas d'ordre ε . Bien que cela puisse paraître coûteux, ces calculs sont indépendants d'un triangle à l'autre et peuvent donc être **parallélisés**.
- (ii) Au final, le problème à résoudre est **de taille** N , le nombre de sommets du maillage, ce qui est raisonnable.

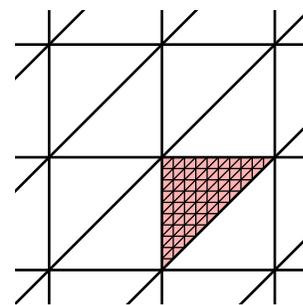


FIGURE 7.1 – Raffinement d'une maille dans le cadre d'une méthode d'éléments finis multi-échelles

7.2 Description de la méthode avec les mains

L'objectif de la méthode est de

$$\boxed{\text{décomposer } u \in \mathcal{H} \text{ en } u = u_{\text{grossière}} + u_{\text{échelles fines}}}$$

ou bien, avec d'autres termes, de décomposer $u \in \mathcal{H}$ en $u = u_{\text{macro}} + u_{\text{micro}}$. En effet, *moralement*, la solution du problème fractal $u \in \mathcal{H}$ est très riche, dans le sens où elle contient des informations à toutes les échelles, aussi bien macroscopique que microscopique. Nous allons voir que cette **décomposition n'est pas unique**.

La clé est alors d'utiliser une « bonne » décomposition de l'espace \mathcal{H} qui permette d'appliquer une méthode de type Galerkin sur un espace bien choisi. Nous verrons que dans la version la plus simple de cette méthode, les nouvelles fonctions de base de cet espace sont égales aux **éléments finis \mathbb{P}_1 classiques MOINS leur projection orthogonale sur un espace de fonctions haute fréquence** par rapport rapport à la forme bilinéaire du problème.

7.3 Description théorique de la méthode

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on rappelle que la projection Π_k est définie par

$$\Pi_k = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_k, \quad (7.1)$$

où \mathcal{S}_k est en particulier un sous-espace **complet** de \mathcal{H} (cf. démonstration de la proposition 5.1). Comme Π_k est une projection, on a la décomposition $\mathcal{H} = \text{Im } \Pi_k \oplus \text{Ker } \Pi_k$ et, par construction $\mathcal{S}_k = \text{Im } \Pi_k$. Il est donc naturel d'introduire la définition suivante.

Définition 7.1 (Espace haute fréquence). Soit $\mathcal{V}_k \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \Pi_k \subset \mathcal{H}$, le noyau de Π_k qui correspond aux **caractéristiques haute fréquence de \mathcal{H}** non capturées par la projection Π_k .

On en déduit la première décomposition de l'espace de solutions \mathcal{H} .

Proposition 7.1 (Première décomposition (naïve) de \mathcal{H}). On peut alors décomposer l'espace des solutions \mathcal{H} de la manière suivante

$$\underbrace{\mathcal{H}}_{\text{espace des solutions}} = \underbrace{\mathcal{S}_k}_{\text{espace grossier}} \oplus \underbrace{\mathcal{V}_k}_{\text{caractéristiques haute fréquence}}. \quad (7.2)$$

Remarques 7.1.

- (i) On peut voir \mathcal{S}_k comme un espace « **macroscopique** » et \mathcal{V}_k comme un espace « **microscopique** ».
- (ii) Comme Π_k est une projection, on a $\text{Ker } \Pi_k = \text{Im}(\mathbf{I} - \Pi_k)$.

En effet pour tout $u \in \mathcal{H}$, on peut écrire $u = \Pi_k u + (\mathbf{I} - \Pi_k)u$ et d'une part, par définition $u_{\mathcal{S}_k} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_k u \in \mathcal{S}_k$ et d'autre part, $\Pi_k(\mathbf{I} - \Pi_k)u = 0$ donc $u_{\mathcal{V}_k} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{I} - \Pi_k)u \in \mathcal{V}_k$. Ceci mène à la décomposition

$$u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}. \quad (7.3)$$

La figure fig. 7.2, inspirée de [Pet], donne une idée de cette décomposition.

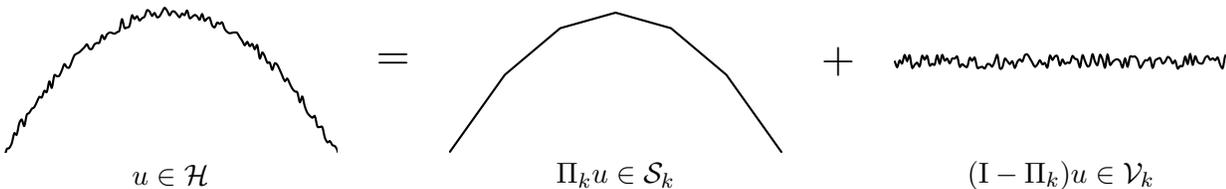


FIGURE 7.2 – Illustration de la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{S}_k \oplus \mathcal{V}_k$

Problème de cette décomposition. Cette décomposition ne nous aide pas dans l'immédiat car, moralement, le terme $(\mathbf{I} - \Pi_k)u$ contient « trop d'énergie » ce qui rend la méthode de Galerkin classique inutile. Pour résoudre cette difficulté, nous allons **orthogonaliser la décomposition**. De cette manière, nous obtiendrons un nouvel espace grossier qui contiendra suffisamment d'information haute fréquence pour donner des approximations précises.

7.3.1 Pourquoi orthogonaliser la décomposition naïve ?

Reprenons l'analyse d'erreur classique abordée dans la section 1.3 selon laquelle, sous une hypothèse de régularité de la solution u ,

$$\|u - u_k\| \leq C h \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}.$$

Il s'agit de

$$\text{trouver } u_k \in \mathcal{S}_k \text{ tel que } a(u_k, v_k) = (f, v_k) \text{ pour tout } v_k \in \mathcal{S}_k. \quad (\text{Galerkin v.1})$$

En particulier, comme $\mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, on a $a(u, v_k) = (f, v_k)$ pour tout $v_k \in \mathcal{S}_k$ et en soustrayant les deux formulations variationnelles, on obtient

$$a(u_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k. \quad (7.4)$$

Premier but modeste : reprenons la décomposition 7.3 et tentons d'approcher $u_{\mathcal{S}_k}$ et d'estimer l'erreur d'approximation. L'équation 7.4 entraîne que $a(u_{\mathcal{S}_k} - u_k + u_{\mathcal{V}_k}, v_k) = 0$, soit

$$a(u_{\mathcal{S}_k} - u_k, v_k) = - \underbrace{a(u_{\mathcal{V}_k}, v_k)}_{\diamond} \quad \forall v_k \in \mathcal{S}_k. \quad (\text{A0})$$

On en déduit par coercivité et continuité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ que

$$\mathbf{a} \|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\| \leq \diamond \leq \mathbf{U} \|u_{\mathcal{V}_k}\| \quad (\text{A})$$

$$\mathbf{a} \underbrace{\|u_{\mathcal{V}_k}\|}_{\text{contient trop d'énergie}} \leq \diamond \leq \mathbf{U} \underbrace{\|u_{\mathcal{S}_k} - u_k\|}_{\star} \quad (\text{A}')$$

D'après A, le terme \star est petit si $\|u_{\mathcal{V}_k}\|$ est petit. Or ceci n'est raisonnable car

$$\|u_{\mathcal{V}_k}\|^2 = \underbrace{\|\nabla u_{\mathcal{V}_k}\|_{L^2(\Omega \setminus \Gamma)}^2}_{\approx \varepsilon^{-1}} + \text{terme de saut.}$$

En réalité, l'estimation A est trop grossière. Revenons à l'égalité A0 et **étudions ce qu'il se passe si l'on change l'espace de Galerkin.**

L'idée. Nous aimerions, dans l'idéal, que le terme \diamond soit nul. Ceci est possible si nous remplaçons l'espace de Galerkin \mathcal{S}_k par un **nouvel espace** \mathcal{W}_k défini par $\mathcal{W}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathcal{S}_k \mid a(v, w) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_k\}$. Cet espace est l'orthogonal de \mathcal{V}_k pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$, *i.e.*

$$\boxed{\mathcal{W}_k = \mathcal{V}_k^{\perp a}}.$$

Ce nouvel espace \mathcal{W}_k mène à une nouvelle décomposition de la solution u sous la forme

$$u = u_{\mathcal{W}_k} + \tilde{u}_{\mathcal{V}_k} \quad \text{avec} \quad a(u_{\mathcal{W}_k}, \tilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0. \quad (7.5)$$

Nous montrerons dans la proposition 7.4 que \mathcal{W}_k et \mathcal{S}_k sont de même dimension.

Pourquoi est-ce que cela fonctionne ? Nous reprenons l'analyse qui nous a mené à A0. Réécrivons donc une formulation variationnelle, cette fois dans \mathcal{W}_k

$$\text{trouver } \tilde{u}_k \in \mathcal{W}_k \text{ tel que } a(\tilde{u}_k, v_k) = (f, v_k) \text{ pour tout } v_k \in \mathcal{W}_k. \quad (\text{Galerkin v.2})$$

En particulier, comme $\mathcal{W}_k \subset \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, on a $a(u, v_k) = (f, v_k)$ pour tout $v_k \in \mathcal{W}_k$ et en soustrayant les deux formulations variationnelles, on obtient

$$a(\tilde{u}_k - u, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k. \quad (7.6)$$

Reprenons la nouvelle décomposition 7.5. L'équation 7.6 entraîne que $a(u_{\mathcal{W}_k} - \tilde{u}_k + \tilde{u}_{\mathcal{V}_k}, v_k) = 0$, soit

$$a(u_{\mathcal{W}_k} - \tilde{u}_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{W}_k,$$

car $a(\tilde{u}_{\mathcal{V}_k}, v_k) = 0$ pour tout $v_k \in \mathcal{W}_k$ par définition de \mathcal{W}_k . On en déduit que

$$\|u_{\mathcal{W}_k} - \tilde{u}_k\| = 0 \quad \text{et} \quad u_{\mathcal{W}_k} = \tilde{u}_k.$$

Récapitulatif. Nous avons obtenu deux décompositions :

- (i) $u = u_{\mathcal{S}_k} + u_{\mathcal{V}_k}$ avec $u_{\mathcal{S}_k} = \Pi_k u$ et $u_{\mathcal{V}_k} = (\mathbf{I} - \Pi_k)u$;
- (ii) $u = u_{\mathcal{W}_k} + \tilde{u}_{\mathcal{V}_k}$ tel que $a(u_{\mathcal{W}_k}, \tilde{u}_{\mathcal{V}_k}) = 0$.

De plus, on remarque que $\Pi_k u_{\mathcal{W}_k} = u_{\mathcal{S}_k}$ car d'une part $\Pi_k u = u_{\mathcal{S}_k}$, par définition de $u_{\mathcal{S}_k}$, et d'autre part $\Pi_k u = \Pi_k u_{\mathcal{W}_k} + \Pi_k \tilde{u}_{\mathcal{V}_k} = \Pi_k u_{\mathcal{W}_k}$.

Proposition 7.2. On a ainsi approché $u_{\mathcal{S}_k}$ dans le sens où

$$\Pi_k \tilde{u}_k = u_{\mathcal{S}_k}.$$

■ **Démonstration.** En effet, $\Pi_k \tilde{u}_k - u_{\mathcal{S}_k} = \Pi_k(\tilde{u}_k - u_{\mathcal{W}_k}) = 0$. □

Remarque 7.1 ([BL22, p.337]). L'objectif essentiel de méthodes multi-échelles n'est paradoxalement pas de capturer précisément les petites échelles de la solution, mais principalement de **capturer les grandes échelles**. Comme le montre la Section 2.1.2 du Chapitre 2 de [BL22], une méthode naïve ne capture même pas ces grandes échelles. C'est donc elles qui constituent l'objectif principal. Cela étant, comme il est impossible de deviner à l'avance l'influence des petites échelles sur les grandes, et de démêler qui fait quoi, la meilleure approche est donc d'essayer d'approcher aussi bien que possible les petites échelles, pour *in fine* assurer la bonne approximation des grandes.

7.3.2 Décomposition a -orthogonale

Par définition, $\mathcal{V}_k = \text{Ker } \Pi_k \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace fermé de \mathcal{H} et est donc un espace de Hilbert. On peut donc définir la **projection orthogonale** suivante.

Définition 7.2 (Correcteur haute fréquence). Soit $\mathcal{C}_k: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_k$ la *projection orthogonale* de \mathcal{H} dans \mathcal{V}_k pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$ dans \mathcal{H} , i.e. pour $v \in \mathcal{H}$,

$$a(v - \mathcal{C}_k v, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in \mathcal{V}_k \quad (\text{projection } a\text{-orthogonale}). \quad (7.7)$$

Remarque 7.2. On rappelle que la norme $\|\cdot\|_a \stackrel{\text{def}}{=} a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Plus précisément, d'après la coercivité et la continuité de la forme $a(\cdot, \cdot)$ 4.5 et 4.4, pour tout $v \in \mathcal{H}$,

$$\sqrt{a} \|v\| \leq \|v\|_a \leq \sqrt{U} \|v\|. \quad (7.8)$$

On peut alors définir l'espace d'éléments finis multi-échelles.

Proposition 7.3 (Décomposition a -orthogonale). L'espace d'éléments finis multi-échelles $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est défini comme le complément orthogonal de $\text{Ker } \Pi_k$ dans \mathcal{H} , i.e.

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}_k^{\text{ms}} \oplus \mathcal{V}_k, \quad a(w, v) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}, v \in \mathcal{V}_k. \quad (7.9)$$

D'après la définition 7.2, on peut écrire plus précisément que

$$\mathcal{S}_k^{\text{ms}} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{H}\} = \{v - \mathcal{C}_k v \mid v \in \mathcal{S}_k\} = \text{Vect}\{(\mathbf{I} - \mathcal{C}_k)\lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)}\}.$$

De plus, l'espace d'éléments finis multi-échelles $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est isomorphe à \mathcal{S}_k , i.e. $\dim \mathcal{S}_k^{\text{ms}} = \dim \mathcal{S}_k$.

■ **Démonstration.**

- (i) Construisons une base de $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$. L'image des fonctions de base $\lambda_p^{(k)}$ par la projection \mathcal{C}_k est notée $\phi_p^{(k)} = \mathcal{C}_k \lambda_p^{(k)} \in \mathcal{V}_k$, i.e. $\phi_p^{(k)}$ est solution du problème de correcteur

$$a(\phi_p^{(k)}, v_k) = a(\lambda_p^{(k)}, v_k) \quad \forall v_k \in \mathcal{V}_k.$$

Une base de $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est donc donnée par la base classique modifiée

$$\{\lambda_p^{(k)} - \phi_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)}\}.$$

- (ii) Soit $v \in \mathcal{H}$. D'après la décomposition 7.2, il existe un couple $(s_k, v_k) \in \mathcal{S}_k \times \mathcal{V}_k$ tel que $v = s_k + v_k$. Ainsi, $v - \mathcal{C}_k v = s_k + v_k - \mathcal{C}_k(s_k + v_k) = s_k - \mathcal{C}_k s_k$.

□

Proposition 7.4 ([BL22, p.367]). L'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ peut s'écrire

$$\mathcal{S}_k^{\text{ms}} = (\text{Id} - \mathcal{C}_k)\mathcal{S}_k.$$

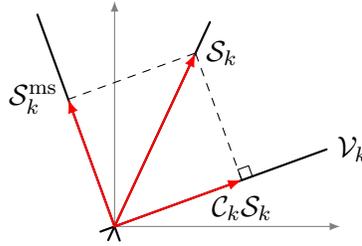


FIGURE 7.3 – Construction géométrique de $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$

■ **Démonstration.** L'inclusion $(\text{Id} - \mathcal{C}_k)\mathcal{S}_k \subset \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est claire par définition de la projection \mathcal{C}_k . Puisque \mathcal{S}_k et $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ sont de même dimension, il suffit donc de montrer que l'opérateur $(\text{Id} - \mathcal{C}_k)$ est injectif sur \mathcal{S}_k . Si $v_k \in \mathcal{S}_k$ satisfait $(\text{Id} - \mathcal{C}_k)v_k = 0$, nous avons $v_k = \mathcal{C}_k v_k \in \mathcal{V}_k$. Nous en déduisons que $\Pi_k v_k = 0$ et donc, d'après la formule 6.29 que les produits scalaires $\int_{\omega_p} \lambda_p^{(k)} v \, dx$ sont nuls pour tous les éléments finis $\lambda_p^{(k)}$, ce qui entraîne que $v_k = 0$. Nous obtenons donc l'injectivité voulue. □

Remarques 7.2.

- (i) L'exposant « ms » signifie « multi-échelles » et indique que l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ contient également des informations aux petites échelles.
- (ii) Comme $\dim \mathcal{S}_k^{\text{ms}} = \dim \mathcal{S}_k$, on peut voir l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ comme un espace d'éléments finis modifié et enrichi par les caractéristiques haute fréquence :

$$\underbrace{\mathcal{H}}_{\text{espace des solutions}} = \underbrace{\mathcal{S}_k^{\text{ms}}}_{\text{espace grossier corrigé}} \oplus \underbrace{\mathcal{V}_k}_{\text{caractéristiques haute fréquence}}.$$

- (iii) Dit rapidement, les fonctions de \mathcal{V}_k sont quelconques en dehors des nœuds, et « nulles » aux nœuds. Les fonctions de l'orthogonal $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ sont donc, *a contrario*, libres aux nœuds et, dans l'esprit au moins, solutions du problème en dehors des nœuds [BL22, p.367].
- (iv) Dit encore autrement, l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est de même dimension que \mathcal{S}_k , l'espace d'éléments finis classiques \mathbb{P}_1 associé au maillage $\mathcal{T}^{(k)}$, et il est un raffinement de celui-ci au sens où, tout en ayant ses degrés de liberté aux nœuds du maillage, il est « entre les nœuds » beaucoup plus adapté dans son approximation du problème oscillant considéré [BL22, p.367].

Proposition 7.5. Toute fonction $v \in \mathcal{H}$ peut être décomposée en $w_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ et $v_k \in \mathcal{V}_k$ tels que $v = w_k + v_k$, avec $a(w_k, v_k) = 0$.

■ **Démonstration.** Soit $v \in \mathcal{H}$. On peut écrire $v = (v - \mathcal{C}_k v) + \mathcal{C}_k v$ avec $\mathcal{C}_k v \in \mathcal{V}_k$ et $v - \mathcal{C}_k v \in \mathcal{V}_k^\perp$ d'après le lemme E.1. \square

Les éléments de \mathcal{V}_k sont des fonctions qui oscillent sur des échelles inférieures à h_k . L'erreur correspond à

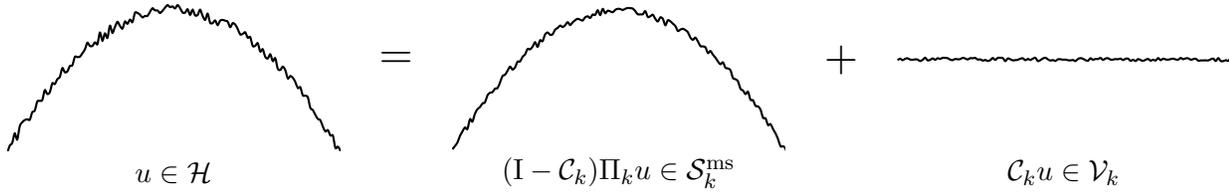


FIGURE 7.4 – Représentation de la décomposition a -orthogonale

$\mathcal{C}_k u$, on a donc une très bonne approximation.

On considère alors le problème multi-échelles

$$\boxed{\text{Trouver } u_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}} \text{ tel que } a(u_k, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}.} \quad (7.10)$$

Théorème 7.1. Le problème discret 7.10 admet une unique solution $u_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ donnée par

$$u_k = (I - \mathcal{C}_k)\Pi_k u, \quad (7.11)$$

où $u \in \mathcal{H}$ désigne l'unique solution du problème à interfaces fractales PiF. De plus, si les hypothèses 6.39, 6.40 et 6.41 sont satisfaites, il existe une constante C ne dépendant que des constantes citées dans le théorème 6.3 et de la constante de coercivité a telle que l'erreur de discrétisation $u - u_k = \mathcal{C}_k u$ vérifie

$$\|u - u_k\| \leq C h_k \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (7.12)$$

Remarques 7.3.

- (i) La solution u_k du problème 7.10 est égale à la projection de la solution u du problème PiF sur l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$.
- (ii) La constante C dans apparaissant 7.12 est indépendante de k .
- (iii) L'entier k , qui correspond au niveau de raffinement du réseau d'interfaces, joue le rôle de la petite échelle, souvent notée ε dans le sens où $d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ équivaut à $\varepsilon \rightarrow 0$.

■ **Démonstration.** Premièrement, on remarque qu'on a bien $u_k \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ car $\Pi_k u \in \mathcal{S}_k$ et donc $u - \mathcal{C}_k \Pi_k u \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ par définition.

- (i) Montrons dans un premier temps que $u - u_k = \mathcal{C}_k u$. En effet, comme $u - \Pi_k u \in \text{Ker } \Pi_k = \text{Im}(I - \Pi_k)$,

$$u - u_k = u - (I - \mathcal{C}_k)\Pi_k u = u - \mathcal{C}_k u - (I - \mathcal{C}_k)\Pi_k u + \mathcal{C}_k u = \underbrace{(I - \mathcal{C}_k)(u - \Pi_k u)}_{=0} + \mathcal{C}_k u = \mathcal{C}_k u.$$

- (ii) On en déduit que u_k est l'unique solution de 7.10. Nous voulons montrer que

$$a(u_k, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}} \quad (7.13)$$

ce qui équivaut, d'après le point précédent, à montrer que

$$a(u, v) - a(\mathcal{C}_k u, v) = (f, v) \quad v \in \mathcal{S}_k^{\text{ms}}.$$

Or, d'après la décomposition a -orthogonale $\mathcal{H} = \mathcal{S}_k^{\text{ms}} \oplus^\perp \mathcal{V}_k$ 7.9, on a $a(\mathcal{C}_k u, v) = 0$ car $\mathcal{C}_k u \in \mathcal{V}_k$ par définition. Le problème 7.13 est donc équivalent au problème PiF sur le sous-espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}} \subset \mathcal{H}$, dont u est l'unique solution. L'unicité de la solution u_k découle de la coercivité de la forme $a(\cdot, \cdot)$.

(iii) D'après la coercivité (cf. 4.2) de la forme $a(\cdot, \cdot)$ et le premier point, on a

$$\mathbf{a} \|u - u_k\|^2 = \mathbf{a} \|\mathcal{C}_k u\|^2 \leq a(\mathcal{C}_k u, \mathcal{C}_k u). \quad (7.14)$$

De plus, par linéarité de $a(\cdot, \cdot)$ et par la propriété de projection a -orthogonale 7.7,

$$a(\mathcal{C}_k u, \mathcal{C}_k u) = \underbrace{a(\mathcal{C}_k u - u, \mathcal{C}_k u)}_{=0} + a(u, \mathcal{C}_k u) \quad (7.15)$$

De plus, $\mathcal{C}_k u \in \mathcal{V}_k = \text{Ker } \Pi_k$ donc $\Pi_k \mathcal{C}_k u = 0$ et donc par 7.14 et 7.15,

$$\mathbf{a} \|u - u_k\|^2 \leq a(u, \mathcal{C}_k u - \Pi_k \mathcal{C}_k u).$$

Comme u est solution du problème PiF, par Cauchy-Schwarz,

$$\mathbf{a} \|u - u_k\|^2 \leq a(u, \mathcal{C}_k u - \Pi_k \mathcal{C}_k u) = (f, \mathcal{C}_k u - \Pi_k \mathcal{C}_k u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\mathcal{C}_k u - \Pi_k \mathcal{C}_k u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (7.16)$$

Le résultat est obtenu en appliquant l'inégalité 6.43 du théorème d'approximation de Π_k 6.3 à la fonction $\mathcal{C}_k u \in \mathcal{H}$

$$\|\mathcal{C}_k u - \Pi_k \mathcal{C}_k u\|_{L^2(\Omega)} \leq ch_k \|\mathcal{C}_k u\| = ch_k \|u - u_k\|. \quad (7.17)$$

Finalement, en combinant 7.16 et 7.17, on obtient

$$\|u - u_k\| \leq C h_k \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{avec } C = \frac{c}{\mathbf{a}}.$$

□

Remarque 7.3. On remarque en particulier que l'estimation 7.12 que nous venons de démontrer ne suppose **aucune hypothèse particulière sur la régularité de la solution** u , comme annoncé dans les objectifs 1.4.

Problème. Malgré ces propriétés recherchées, l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms}}$ est **problématique**. En effet, ses fonctions de base $(I - \mathcal{C}_k)\lambda_p^{(k)}$ avec $p \in \mathcal{N}^{(k)}$ sont en général à **support global**, ce qui le rend **impossible à calculer en pratique**. En effet, ceci engendre une **matrice de rigidité dense** ce qui est désastreux pour construction de **solveurs rapides et efficaces**. Pour remédier à cette lacune, considérons la stratégie suivante de **localisation**, basée sur la fait que la correction $\phi_p^{(k)}$ décroît de façon exponentielle à partir de sommet p (cf. [MP13, Sec. 3.2]).

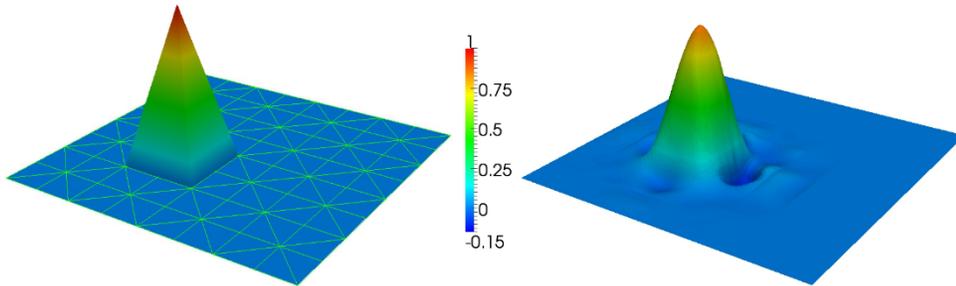


FIGURE 7.5 – À gauche : fonction de base nodale . À droite : fonction de base modifiée [AH15]

7.4 Nécessité d'une approximation locale du correcteur haute fréquence

Problème. L'opérateur \mathcal{C} est global et non local mais il décroît très rapidement et peut être approximé localement.

Nous considérons donc les approximations locales $\mathcal{C}_k^{(\nu)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ avec $\nu \in \mathbf{N}$ de \mathcal{C}_k associées aux espaces

$$\mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vect} \left\{ \left(\mathbf{I} - \mathcal{C}_k^{(\nu)} \right) \lambda_p^{(k)} \mid p \in \mathcal{N}^{(k)} \right\}$$

et aux formulations variationnelles discrètes

$$\boxed{\text{Trouver } u_k^{(\nu)} \in \mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)} \text{ tel que } a(u_k^{(\nu)}, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}}. \quad (7.18)$$

L'estimation d'erreur de discrétisation suivante vient de l'article [KPY18, Theo. 3.3].

Théorème 7.2 (Estimation d'erreur de discrétisation). *Supposons que les approximations $\mathcal{C}_k^{(\nu)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ avec $\nu \in \mathbf{N}$ de \mathcal{C}_k convergent dans le sens où il existe $q < 1$ tel que*

$$\left\| \mathcal{C}_k v - \mathcal{C}_k^{(\nu)} v \right\|_a \leq q^\nu \left\| \mathcal{C}_k v \right\|_a, \quad \nu \in \mathbf{N}, \forall v \in \mathcal{H}. \quad (7.19)$$

Alors, nous avons l'estimation d'erreur de discrétisation

$$\left\| u - u_k^{(\nu)} \right\| \leq (1 + q^\nu) \sqrt{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}}} \left\| u - u_k \right\| + q^\nu \sqrt{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}}} \left\| u - \Pi_k u \right\|, \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

■ **Démonstration.** Comme $u_k^{(\nu)}$ est solution du problème 7.18, pour tout $w_k^{(\nu)} \in \mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}$, $\left\| u - u_k^{(\nu)} \right\|_a \leq \left\| u - w_k^{(\nu)} \right\|_a$.

Ainsi, en prenant en particulier $w_k^{(\nu)} = (\mathbf{I} - \mathcal{C}_k^{(\nu)}) \Pi_k u \in \mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}$, on a, avec l'expression 7.11 de u_k et l'inégalité triangulaire,

$$\left\| u - u_k^{(\nu)} \right\|_a \leq \left\| u - (\mathbf{I} - \mathcal{C}_k^{(\nu)}) \Pi_k u \right\|_a = \left\| (u - u_k) - (\mathcal{C}_k \Pi_k u - \mathcal{C}_k^{(\nu)} \Pi_k u) \right\|_a \leq \left\| u - u_k \right\|_a + \left\| \mathcal{C}_k \Pi_k u - \mathcal{C}_k^{(\nu)} \Pi_k u \right\|_a. \quad (7.20)$$

Majorons le second terme. D'après l'hypothèse de convergence 7.19 appliquée à $v = \Pi_k u \in \mathcal{S}_k \subset \mathcal{H}$, l'expression 7.11 de u_k et l'inégalité triangulaire,

$$\left\| \mathcal{C}_k \Pi_k u - \mathcal{C}_k^{(\nu)} \Pi_k u \right\|_a \leq q^\nu \left\| \mathcal{C}_k \Pi_k u \right\|_a \leq q^\nu (\left\| u - u_k \right\|_a + \left\| u - \Pi_k u \right\|_a). \quad (7.21)$$

En combinant les inégalités 7.20 et 7.21, et d'après l'équivalence 7.8 des normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|$,

$$\begin{aligned} \left\| u - u_k^{(\nu)} \right\| &\leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}}} \left\| u - u_k^{(\nu)} \right\|_a \leq \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}}} \left[\left\| u - u_k \right\|_a + q^\nu (\left\| u - u_k \right\|_a + \left\| u - \Pi_k u \right\|_a) \right] \\ &\leq \frac{\sqrt{\mathbf{U}}}{\sqrt{\mathbf{a}}} \left[(1 + q^\nu) \left\| u - u_k \right\| + q^\nu \left\| u - \Pi_k u \right\| \right]. \end{aligned}$$

□

7.5 Construction d'une approximation locale du correcteur haute fréquence grâce à une cell-based subspace correction

Nous nous concentrons sur la construction d'approximations locales convergentes $\mathcal{C}_k^{(\nu)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ avec $\nu \in \mathbf{N}$ par « **local subspace correction** ». Étant donné la construction de la projection $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ reposant sur

7.5. Construction d'une approximation locale du correcteur haute fréquence grâce à une cell-based subspace correction

le partitionnement du domaine en cellule $G \in \Omega^{(k)}$, (cf. 6.1) et le caractère local de $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ (cf. 6.3), il est naturel de considérer la décomposition

$$\mathcal{V}_k = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{V}_G \quad (7.22)$$

en les sous-espaces

$$\boxed{\mathcal{V}_G = \{(I - \Pi_k)v|_G \mid v \in \mathcal{H}\} \subset \mathcal{V}_k, \quad G \in \Omega^{(k)},} \quad \text{où} \quad v|_G(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in G, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 7.6. Les espaces \mathcal{V}_G sont des sous-espaces fermés de $\mathcal{V}_k = \text{Ker } \Pi_k$.

■ **Démonstration.** Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{V}_G \subset \mathcal{V}_k$ qui converge vers $v \in \mathcal{H}$. Alors $v \in \mathcal{V}_k$, i.e. $\Pi_k v = 0$ car \mathcal{V}_k est fermé. De plus, $v = v|_G$ car $\text{supp } v_n \subset G$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et donc $v = (I - \Pi_k)v|_G \in \mathcal{V}_G$. □

Proposition 7.7. La décomposition 7.22 entraîne que tout $v \in \mathcal{V}_k$ peut être décomposé de façon unique en la somme de ses composantes locales

$$v_G = (I - \Pi_k)v|_G \in \mathcal{V}_G, \quad G \in \Omega^{(k)}. \quad (7.23)$$

Le lemme suivant est le résultat principal de cette section.

Lemme 7.1 (Stabilité de la décomposition). La décomposition 7.22 est stable dans le sens où pour tout $v \in \mathcal{V}_k$, la décomposition 7.23 vérifie

$$\sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v_G\|_a^2 \leq K_1 \|v\|_a^2 \quad (7.24)$$

avec une constante K_1 ne dépendant que des constantes apparaissant dans les théorèmes 6.3 et 6.4 et des constantes de coercivité et de continuité a et \mathbf{U} (cf. 4.2).

Supposons que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, le nombre de cellules voisines de G dans $\Omega^{(k)}$ soit borné uniformément par $c_N \in \mathbf{R}$. Alors, la décomposition 7.22 est bornée dans le sens où la décomposition 7.23 vérifie

$$\|v\|_a^2 \leq K_2 \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v_G\|_a^2 \quad (7.25)$$

avec une constante K_2 ne dépendant que de c_N .

Définition 7.3. Pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, on note $V(G)$ l'ensemble des cellules voisines de G .

■ **Éléments de démonstration.**

(i) On remarque que le chevauchement des sous-espaces \mathcal{V}_G pour $G \in \Omega^{(k)}$ est $\Gamma^{(k)}$. Le caractère borné 7.25 de la décomposition est une conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. D'après la décomposition 7.23, pour $v \in \mathcal{V}_k$,

$$v = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} v_G$$

et donc

$$\|v\|_a^2 = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v_G\|_a^2 + \sum_{G \neq G'} a(v_G, v_{G'}). \quad (7.26)$$

Or pour toutes cellules $G, G' \in \Omega^{(k)}$ disjointes,

$$\text{supp } G \cap \text{supp } G' = \begin{cases} \xi \subset \Gamma^{(k)} & \text{si } G' \in \mathcal{V}(G), \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, 7.26 devient

$$\begin{aligned} \|v\|_a^2 &= \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \left[\|v_G\|_a^2 + \sum_{G' \in \mathcal{V}(G)} a(v_G, v_{G'}) \right] \\ \text{par continuité de } a &\leq \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \left[\|v_G\|_a^2 + \frac{U}{a} \|v_G\|_a \underbrace{\sum_{G' \in \mathcal{V}(G)} \|v_{G'}\|_a}_{\text{au plus } c_N \text{ termes}} \right] \end{aligned}$$

(ii) Démontrons l'inégalité 7.24. On est nécessairement dans l'un des deux cas suivants.

(a) Soit $G \in \Omega_\infty^{(k)}$. On considère $v \in \mathcal{V}_k$. Alors, par la définition 6.4 de Π_k puis celle de $\Pi_{\mathcal{H}_k}$ (cf. 6.1), on a

$$\Pi_k v|_G = \Pi_{\mathcal{S}_k} \circ \Pi_{\mathcal{H}_k} v|_G = \Pi_{\mathcal{S}_k} v|_G.$$

La majoration 6.34, la propriété d'approximation 6.36 de $\Pi_{\mathcal{S}_k}$ ainsi que la condition géométrique 6.27 mènent à

$$\begin{aligned} \|v_G\|^2 &= \|(I - \Pi_k)v|_G\|^2 = \|(I - \Pi_{\mathcal{S}_k})v|_G\|^2 \\ \text{par déf. de } \|\cdot\| &= \|\nabla(I - \Pi_{\mathcal{S}_k})v\|_{L^2(G)}^2 + \sum_{j=1}^k (1+c)^j C_j \|v - \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(\Gamma_j \cap \partial G)}^2 \\ \text{par C.-S., 6.36 et 6.27} &\leq 2\|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 + 2\|\nabla \Pi_{\mathcal{S}_k} v\|_{L^2(G)}^2 + c h_k C_\Gamma \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 \\ \text{par 6.34} &\leq (2 + c(d, \sigma) + c h_k C_\Gamma) \|\nabla v\|_{L^2(G)}^2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

(b) Soit $G \in \Omega^{(k)} \setminus \Omega_\infty^{(k)}$. Voir [KPY22, p.1473].

□

Soit $P_G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_G$ avec $G \in \Omega^{(k)}$, une projection a -orthogonale définie par, pour tout $w \in \mathcal{H}$,

$$\boxed{P_G w \in \mathcal{V}_G \text{ tel que } a(P_G w, v) = a(w, v) \text{ pour tout } v \in \mathcal{V}_G} \quad (7.28)$$

et

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{G \in \Omega^{(k)}} P_G \quad (7.29)$$

le **préconditionneur** associé.

Les propriétés 7.24 et 7.25 entraînent le lemme suivant qui est central dans l'analyse des *méthodes de Schwarz additives* et représente l'élément de base de la théorie.

Lemme 7.2. *L'opérateur $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_G$ défini par 7.29 est auto-adjoint pour la forme $a(\cdot, \cdot)$ et pour tout $v \in \mathcal{V}_k$,*

$$\frac{1}{K_1} a(v, v) \leq a(Tv, v) \leq K_2 a(v, v). \quad (7.30)$$

■ **Démonstration.**

7.5. Construction d'une approximation locale du correcteur haute fréquence grâce à une cell-based subspace correction

- (i) Montrons tout d'abord que T est symétrique : soient $v, w \in \mathcal{V}_k$, par la définition 7.29 de T et par bilinéarité de $a(\cdot, \cdot)$,

$$a(Tv, w) = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} a(P_G v, w).$$

Or, par la définition 7.28 de la projection P_G et la symétrie de $a(\cdot, \cdot)$,

$$a(P_G v, w) = a(w, v) = a(v, w) = a(P_G w, v) = a(v, P_G w)$$

ce qui donne bien

$$a(Tv, w) = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} a(v, P_G w) = a(v, Tw).$$

- (ii) Soit $v = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} v_G$ la décomposition d'une fonction $v \in \mathcal{V}_k$ (cf. Prop. 7.7). Ainsi, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$a(v, v) = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} a(v, v_G) = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} a(P_G v, v_G) \leq \left(\sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|P_G v\|_a^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v_G\|_a^2 \right)^{1/2}$$

Or $\|P_G v\|_a^2 = a(P_G v, P_G v) = a(P_G v, v)$ et donc

$$\sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|P_G v\|_a^2 = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} a(P_G v, v) = a(Tv, v).$$

Ainsi, par la propriété 7.24,

$$a(v, v) \leq \sqrt{K_1} \|v\|_a (a(Tv, v))^{1/2}$$

ce qui donne la première inégalité après simplification par $\|v\|_a$ et élévation au carré.

- (iii) Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la propriété 7.25, pour tout $v \in \mathcal{V}_k$,

$$a(Tv, v) \leq \|Tv\|_a \|v\|_a \leq \left(K_2 \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|P_G v\|_a^2 \right)^{1/2} \|v\|_a$$

Or, on remarque comme précédemment que $\|P_G v\|_a^2 = a(P_G v, P_G v) = a(P_G v, v)$, donc

$$a(Tv, v) \leq (K_2 a(Tv, v))^{1/2} \|v\|_a$$

ce qui donne la deuxième inégalité après simplification par $a(Tv, v)$ et élévation au carré. □

Remarque 7.4. En dimension finie, un opérateur est *symétrique* si et seulement s'il est *auto-adjoint*. Ainsi, nous dirons indifféremment que l'opérateur T est symétrique ou auto-adjoint.

Le prochain lemme est démontré dans [KY16, Théo. 3.2].

Lemme 7.3. Le spectre de l'opérateur T est un sous-ensemble de l'intervalle

$$\text{Sp}(T) \subset \left[\frac{1}{K_1}; K_2 \right]$$

On en déduit le lemme suivant qui donne une borne du conditionnement du préconditionneur T (7.29).

Lemme 7.4. Le conditionnement $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \|T\|_a \|T^{-1}\|_a = \frac{\lambda_{\max}(T)}{\lambda_{\min}(T)}$ de T restreint à \mathcal{V}_k vérifie

$$\kappa \leq K_1 K_2. \quad (7.31)$$

On considère la méthode itérative de Richardson

$$\mathcal{C}_k^{(\nu+1)} = \mathcal{C}_k^{(\nu)} + \omega T(\mathbf{I} - \mathcal{C}_k^{(\nu)}), \quad \mathcal{C}_k^{(0)} = 0, \quad (7.32)$$

avec ω , un *facteur de relaxation* à bien choisir. On remarque que $\mathcal{C}_k^{(\nu)} v \in \mathcal{V}_k$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ et $v \in \mathcal{H}$. Maintenant, démontrons la convergence de la méthode 7.32.

Théorème 7.3 (Convergence des $\mathcal{C}_k^{(\nu)}$). On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, le nombre de cellules voisines de G dans $\Omega^{(k)}$ soit borné uniformément par $c_N \in \mathbf{R}$. Alors, les approximations $\mathcal{C}_k^{(\nu)}$ pour $\nu \in \mathbf{N}$ de \mathcal{C}_k définies par 7.32 sont convergentes pour $\omega < 2/K_2$ dans le sens de 7.19

$$\|\mathcal{C}_k v - \mathcal{C}_k^{(\nu)} v\|_a \leq q^\nu \|\mathcal{C}_k v\|_a, \quad \nu \in \mathbf{N}, \forall v \in \mathcal{H}. \quad (7.33)$$

De plus, le taux de convergence est $q = \frac{K_1 K_2 - 1}{K_1 K_2 + 1}$ pour le facteur de relaxation optimal $\omega = \frac{2}{\frac{1}{K_1} + K_2}$ avec K_1 et K_2 ne dépendant que des constantes apparaissant dans les théorèmes 6.3 et 6.4, de la constante géométrique C_0 dans 2.12, de c_N et des constantes de coercivité et de continuité a et U (cf. 4.2).

■ **Démonstration.** On note l'erreur $e^{(\nu)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_k - \mathcal{C}_k^{(\nu)}$. Ainsi, en considérant la restriction de \mathcal{C}_k à \mathcal{V}_k , on a $\mathcal{C}_k = \mathbf{I}$ et donc

$$e^{(\nu+1)} = \mathcal{C}_k - \mathcal{C}_k^{(\nu)} - \omega T(\mathbf{I} - \mathcal{C}_k^{(\nu)}) = e^{(\nu)} - \omega T(\mathcal{C}_k - \mathcal{C}_k^{(\nu)}) = (\mathbf{I} - \omega T)e^{(\nu)}$$

soit

$$\|e^{(\nu+1)}\|_a \leq \|(\mathbf{I} - \omega T)\|_a \|e^{(\nu)}\|_a$$

et donc si $\|(\mathbf{I} - \omega T)\|_a < 1$, la méthode converge. L'opérateur T est symétrique défini positif (cf. lemme 7.2 et remarque 7.4) et on note $(\lambda_j)_j$ ses valeurs propres. L'erreur $e^{(\nu)}$ converge vers 0 lorsque $\nu \rightarrow \infty$ si $|1 - \omega \lambda_j| < 1$ pour toutes les valeurs propres. Toutes les valeurs propres de T sont positives, donc ceci est vrai pour $0 < \omega < \omega_{\max}$ où

$$\omega_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\lambda_{\max}} = \frac{2}{K_2}.$$

Le choix optimal du facteur de relaxation correspond à la valeur de ω qui minimise le rayon spectral de la matrice $\mathbf{I} - \omega T$, *i.e.*

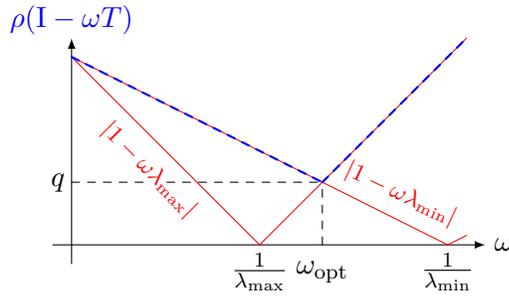
$$\omega_{\text{opt}} = \arg \min_{\omega \in]0; \omega_{\max}[} \rho(\mathbf{I} - \omega T)$$

où le rayon spectral d'une matrice A est défini par $\rho(A) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbf{C} \text{ valeur propre de } A\}$, ce qui revient à calculer

$$\omega_{\text{opt}} = \arg \min_{\omega \in]0; \omega_{\max}[} \max\{|1 - \omega \lambda_{\min}|, |1 - \omega \lambda_{\max}|\}.$$

On observe sur la figure 7.6 que ω_{opt} est tel que $\omega_{\text{opt}} \lambda_{\max} - 1 = 1 - \omega_{\text{opt}} \lambda_{\min}$ soit

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} \quad \text{et dans notre cas,} \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\frac{1}{K_1} + K_2}.$$


 FIGURE 7.6 – Calcul géométrique du facteur de relaxation optimal ω_{opt}

Le taux de convergence correspondant vaut

$$q = \min_{\omega \in]0; \omega_{\max}[} \rho(\mathbf{I} - \omega T) = \rho(\mathbf{I} - \omega_{\text{opt}} T) = 1 - \frac{2}{\kappa + 1} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1},$$

où $\kappa = K_1 K_2$ est le conditionnement. On a donc

$$\|e^{(\nu+1)}\|_a \leq q \|e^{(\nu)}\|_a \quad \text{soit} \quad \|e^{(\nu)}\|_a \leq q^\nu \|e^{(0)}\|_a,$$

ce qui termine la démonstration. □

Estimation de l'erreur de discrétisation. L'estimation d'erreur de discrétisation souhaitée

$$\|u - u_k^{(\nu)}\| = \mathcal{O}(h_k)$$

est obtenue pour un $\eta \in \mathbf{N}$ qui vérifie le **critère d'arrêt**

$$q^\nu \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}} \|u - \Pi_k u\| = \mathcal{O}(h_k). \tag{7.34}$$

En effet, d'après le théorème 7.2,

$$\begin{aligned} \|u - u_k^{(\nu)}\| &\leq (1 + q^\nu) \sqrt{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}}} \|u - u_k\| + q^\nu \sqrt{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}}} \|u - \Pi_k u\| \\ &\stackrel{\substack{\text{par le théo 7.1 et} \\ \text{le critère d'arrêt 7.34}}}{\leq} (1 + q^\nu) \underbrace{\sqrt{\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{a}}} C h_k \|f\|_{L^2(\Omega)}}_{=\mathcal{O}(h_k)} + \mathcal{O}(h_k). \end{aligned}$$

7.6 Calcul pratique d'une base de $\mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}$ [KPY22, p.1475]

La construction de l'espace $\mathcal{S}_k^{\text{ms},(\nu)}$ demande la **résolution successive de problèmes locaux** 7.28 dans les espaces fonctionnels de dimension infinie \mathcal{V}_G . De manière à formuler un analogue « numériquement accessible » à la formulation variationnelle multi-échelles 7.18, nous considérons un espace d'éléments finis $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$, potentiellement très grand et inaccessible numériquement, associé à un raffinement très important \mathcal{T} de $\mathcal{T}^{(k)}$, qui permet se **saisir toutes les échelles** du problème d'interface multi-échelles avec une précision d'ordre h_k . En procédant littéralement comme ci-dessus en remplaçant \mathcal{H} par \mathcal{S} , nous obtenons des versions discrètes des théorèmes 7.1, 7.2 et 7.3, où l'itération 7.32 prend la forme d'une itération de méthode de relaxation.

Chapitre 8

Iterative subspace correction

Nous nous intéressons maintenant à la construction et à l'analyse de convergence des méthodes de *subspace correction* pour le problème général **PiF**, ainsi qu'à des versions discrètes réalisables par calcul pour les approximations d'éléments finis à l'échelle k **FEMPiF_k**. Leurs taux de convergence ne dépendent ni des échelles $k \in \mathbf{N}$ ni du pas de maillage h_k .

8.1 Cell-based subspace decomposition

Le point de départ est la décomposition en deux niveaux

$$\mathcal{H} = \mathcal{V}_0 + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{V}_G \quad (8.1)$$

avec $\mathcal{V}_0 = \mathcal{S}_\ell$ pour $\ell \geq 1$ fixé et pour $k > \ell$ fixé

$$\mathcal{V}_G = \{v|_G \mid v \in \mathcal{H}\}, \quad G \in \Omega^{(k)}.$$

En particulier, toute fonction $v \in \mathcal{H}$ peut être décomposée en la somme de ses composantes locales

$$v_\ell = \Pi_\ell v \in \mathcal{S}_\ell, \quad v_G = (v - \Pi_\ell v)|_G \in \mathcal{V}_G, \quad G \in \Omega^{(k)}.$$

On en déduit le résultat suivant de stabilité de la décomposition 8.1, dont des indications de démonstration sont données dans [KPY22, p.1475].

Proposition 8.1. *Pour tout $v \in \mathcal{H}$,*

$$\|v_\ell\|_a^2 + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \|v_G\|_a^2 \leq K'_1 \|v\|_a^2. \quad (8.2)$$

Le problème du correcteur est résolu dans un patch associé à l'espace \mathcal{V}_G .

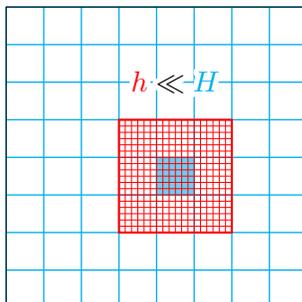


FIGURE 8.1 – Patch de rayon 1

8.2 Sequential subspace correction

Le préconditionneur associé à la décomposition 8.1

$$T \stackrel{\text{def}}{=} P_0 + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} P_G$$

avec les projections $P_0: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_0$ et $P_G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_G$, pour $G \in \Omega^{(k)}$, admet la majoration $\kappa \leq K_1 K_2$ du sont conditionnement κ . Afin de décrire la méthode itérative de *subspace correction* découlant de la décomposition 8.1, nous introduisons la numérotation $\{G_1, \dots, G_m\} = \Omega^{(k)}$ des cellules et nous notons par

$$\mathcal{V}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_{G_i} \quad \text{et} \quad P_i \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{V}_i} \quad \text{pour } i \in \llbracket 1; m \rrbracket$$

respectivement les *sous-espaces* et les *projections de Ritz* associés. Nous considérons maintenant le schéma itératif suivant

$$\begin{cases} w_0 &= u^{(\nu)}, \\ w_{i+1} &= w_i + P_{m-i}(u - w_i) \quad \text{pour } i \in \llbracket 1; m \rrbracket, \\ u^{(\nu+1)} &= w_{m+1}, \end{cases} \quad (8.3)$$

pour $\nu \in \mathbf{N}$ et une condition initiale quelconque $u^{(0)} \in \mathcal{H}$. La stabilité 8.2 de la décomposition et une inégalité de type Cauchy–Schwarz telle qu’énoncée dans le lemme suivant sont les deux conditions classiques pour les estimations de convergence des méthodes itératives de *subspace correction* telles que 8.3 [KPY22, p.1476]

Lemme 8.1 (Inégalité de type Cauchy–Schwarz). *On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, le nombre de cellules voisines de G dans $\Omega^{(k)}$ soit borné uniformément par $c_{\mathbf{N}} \in \mathbf{R}$. Alors, il existe une constante K_3 ne dépendant que de $c_{\mathbf{N}}$ telle que pour tout $v_i \in \mathcal{V}_i$ et $w_j \in \mathcal{V}_j$ pour $i, j \in \llbracket 0; m \rrbracket$, on a l’inégalité de type Cauchy–Schwarz suivante*

$$\sum_{i,j=0}^m a(v_i, w_j) \leq K_3 \left(\sum_{i=0}^m a(v_i, v_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m a(w_j, w_j) \right)^{1/2}.$$

ou encore

$$\sum_{i,j=0}^m a(v_i, w_j) \leq K_3 \left(\sum_{i=0}^m \|v_i\|_a^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m \|w_j\|_a^2 \right)^{1/2}.$$

■ **Éléments de démonstration.** Soit $G \in \Omega^{(k)}$. On introduit le **produit scalaire local**

$$\begin{aligned} a_G(v, w) &= \int_{G \setminus \Gamma} A \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j \cap \partial G} B[v][w] \, d\Gamma_j \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{\infty} (1 + c)^j C_j \int_{\Gamma_j \cap G} B[v][w] \, d\Gamma_j, \quad v, w \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

qui est tel que pour tout $v, w \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{G \in \Omega^{(k)}} a_G(v, w) = a(v, w). \quad (8.4)$$

Soit $G \in \Omega^{(k)}$, on note c_G le nombre de ses cellules voisines.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=0}^m a_G(v_i, w_j) &= \sum_{\ell=0}^m a_G(v_\ell, w_\ell) + \sum_{i \neq j} a_G(v_i, w_j) \\
 &= \sum_{\ell=0}^m a_G(v_\ell, w_\ell) + \sum_{G \cap \bar{G}_i \cap \bar{G}_j \neq \emptyset} a_G(v_i, w_j) \\
 &\leq \sum_{\ell=0}^m a_G(v_\ell, v_\ell) a_G(w_\ell, w_\ell) + \sum_{G \cap \bar{G}_i \cap \bar{G}_j \neq \emptyset} a_G(v_i, v_i) a_G(w_j, w_j)
 \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Gershgorin mènent à

$$\sum_{i,j=0}^m a_G(v_i, w_j) \leq (c_G + 1) \left(\sum_{i=0}^m a_G(v_i, v_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m a_G(w_j, w_j) \right)^{1/2}.$$

Sommons maintenant cette inégalité sur $G \in \Omega^{(k)}$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \sum_{i,j=0}^m a_G(v_i, w_j) &\leq (c_N + 1) \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^m a_G(v_i, v_i) \right)^{1/2}}_{V_G} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^m a_G(w_j, w_j) \right)^{1/2}}_{W_G} \\
 \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} &\leq (c_N + 1) \left(\sum_{G \in \Omega^{(k)}} V_G^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{G \in \Omega^{(k)}} W_G^2 \right)^{1/2} \\
 \text{après inversion des sommes et 8.4} &= (c_N + 1) \left(\sum_{i=0}^m a(v_i, v_i) \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m a(w_j, w_j) \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

□

Ce lemme va nous permettre de démontrer le théorème de convergence suivant, basé sur la propagation d'erreur

$$u - u^{(\nu+1)} = (I - P_0) \cdots (I - P_m)(u - u^{(\nu)}).$$

Théorème 8.1. *On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, le nombre de cellules voisines de G dans $\Omega^{(k)}$ soit borné uniformément par $c_N \in \mathbf{R}$. Alors le procédé itératif 8.3 est convergent pour la norme $\|\cdot\|_a$ et*

$$\left\| u - u^{(\nu+1)} \right\|_a \leq \left(1 - \frac{1}{K_1 K_3^2} \right) \left\| u - u^{(\nu)} \right\|_a$$

pour toute condition initiale $u^{(0)} \in \mathcal{H}$ avec K_1 et K_3 ne dépendant que des constantes des théorèmes 6.4 et 6.3, de la constante géométrique C_0 dans 2.12, de c_N et des constantes de coercivité et de continuité a et U de 4.2.

■ **Démonstration ([KY16, Théorème 5.2]).** Soit $v = v_0 + v_1 + \cdots + v_m$ la décomposition d'une fonction $v \in \mathcal{H}$ en une somme d'éléments $v_i \in \mathcal{V}_i$. Soit $E_{-1} = I$ et soit $E_i = (I - P_i) \cdots (I - P_0)$ pour $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$. D'après la définition 7.28 de $P_i = P_{G_i}$, pour tout $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$, $a((I - P_i)v, v_i) = 0$, et donc,

$$a(E_j v, v_j) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0; m \rrbracket. \tag{8.5}$$

Ainsi, en utilisant successivement la décomposition de v , la définition de P_i et 8.5,

$$\|v\|_a^2 = \sum_{i=0}^m \|v_i\|_a^2 = \sum_{i=0}^m a(v_i, v_i) = \sum_{i=0}^m a(P_i v, v_i) = \sum_{i=0}^m a(v, v_i) = \sum_{i=0}^m a((I - E_i)v, v_i). \quad (8.6)$$

Montrons par récurrence que pour tout $j \in \llbracket 0; m \rrbracket$, $I - E_j = \sum_{i=0}^j P_i E_{i-1}$. Pour $j = 0$, on obtient $I - E_0 = P_0$, ce qui est vrai. Soit $j \in \llbracket 0; m \rrbracket$,

$$I - E_{j+1} = I - (I - P_{j+1})E_j = I - E_j + P_{j+1}E_j = \sum_{i=0}^{j+1} P_i E_{i-1}.$$

Ainsi, en insérant ce résultat dans 8.6, on obtient

$$\|v\|_a^2 = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i a(P_j E_{j-1} v, v_i).$$

De plus, d'après l'inégalité de type Cauchy-Schwarz 8.1, on obtient la majoration

$$\|v\|_a^2 \leq \sum_{i,j=0}^m a(P_j E_{j-1} v, v_i) \leq K_3 \left(\sum_{i=0}^m \|P_i E_{i-1} v\|_a^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^m \|v_j\|_a^2 \right)^{1/2}. \quad (8.7)$$

En élevant l'inégalité précédente au carré et en appliquant le résultat 7.24 du lemme 7.1 de stabilité de la décomposition de v , on obtient, avec $K_1 = K_1(6.4, 6.3, \mathbf{a}, \mathbf{U})$,

$$\|v\|_a^4 \leq K_3^2 \left(\sum_{i=0}^m \|P_i E_{i-1} v\|_a^2 \right) K_1 \|v\|_a^2 \quad \text{soit} \quad \|v\|_a^2 \leq K_1 K_3^2 \sum_{i=0}^m \|P_i E_{i-1} v\|_a^2.$$

On remarque que

$$\|P_i E_{i-1}\|_a^2 = \|E_{i-1} v\|_a^2 - \|E_i v\|_a^2$$

et comme $E_{-1} = I$, par télescopage,

$$\|v\|_a^2 \leq K_1 K_3^2 (\|v\|_a^2 - \|E_m v\|_a^2) \quad \text{soit} \quad \|E_m v\|_a^2 \leq \left(1 - \frac{1}{K_1 K_3^2} \right) \|v\|_a^2.$$

Ce résultat est vrai pour tout $v \in \mathcal{H}$ donc en particulier pour $v = u - u^{(\nu)}$ et on obtient finalement le résultat. \square

Chapitre 9

Expériences numériques

Nous présentons dans ce dernier chapitre les expériences numériques réalisées par Kornhuber, Podlesny et Yserentant dans [KPY22].

Nous considérons la formulation variationnelle discrète **FEMPiF_k** du problème d'interfaces fractales **PiF** avec

$$k = 1, \dots, k_{\max}, \quad \Omega =]0; 1[^2 \subset \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{c} = 1, \quad A = I \in \mathbf{R}^{d \times d}, \quad B = 1.$$

Nous allons considérer **deux géométries fractales** différentes.

Afin d'illustrer les résultats théoriques du chapitre 8, nous considérons l'analogue discret de l'itération linéaire 8.3

$$\mathcal{S}_k = \mathcal{S}_\ell + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \mathcal{V}_G, \quad \mathcal{V}_G = \{v|_G \mid v \in \mathcal{S}_k\} = \mathcal{S}_k(G)$$

avec comme espace grossier $\mathcal{S}_\ell = \mathcal{S}_1$. La maillage fin d'échelle k est pris de sorte qu'il coïncide avec l'espace de solutions discret \mathcal{S}_k . Nous appliquons toujours la condition initiale $u^{(0)} = u_{\mathcal{S}_1}$, *i.e.*, l'approximation par éléments finis sur le maillage grossier $\mathcal{T}^{(1)}$.

Afin d'évaluer les propriétés de convergence de la méthode numérique, deux quantités calculables seront étudiées. Tout d'abord, considérons le nombre minimal d'étapes d'itération ν_{stop} nécessaires pour réduire l'erreur algébrique en dessous de la précision de discrétisation sur le maillage le plus fin. Elle est calculée selon l'estimation d'erreur hiérarchique

$$\left\| u_{\mathcal{S}_k} - u_{\mathcal{S}_k}^{(\nu_{\text{stop}})} \right\| \leq \left\| u_{\mathcal{S}_{k+1}} - u_{\mathcal{S}_k} \right\| \leq \|u - u_{\mathcal{S}_k}\|. \quad (9.1)$$

La dernière estimation est obtenue par la meilleure approximation de l'erreur de discrétisation $\|u - u_{\mathcal{S}_k}\|$ dans \mathcal{S}_{k+1} . Le nombre d'itérations ν_{stop} régit l'efficacité de calcul des méthodes et caractérise leur vitesse de convergence dans la pratique ainsi que leur robustesse par rapport à l'échelle k . Deuxièmement, les facteurs de réduction d'erreur

$$\rho_k^{(\nu)} = \frac{\left\| u_{\mathcal{S}_k} - u_{\mathcal{S}_k}^{(\nu)} \right\|}{\left\| u_{\mathcal{S}_k} - u_{\mathcal{S}_k}^{(\nu-1)} \right\|},$$

et leur moyenne géométrique ρ_k approximent les taux de convergence des méthodes pour les échelles respectives $k = 1, \dots, k_{\max}$ [Pod22, p.101].

9.1 Réseau d'interfaces fractal fortement localisé

Nous reprenons la géométrie définie dans 2.3. On peut vérifier que les hypothèses du théorème d'approximation 6.3, du théorème de stabilité uniforme 6.4 et du résultat de convergence 8.1 sont satisfaites.

ν	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
1	0,208	0,247	0,252	0,252
2	0,221	0,259	0,263	0,263
3	0,223	0,261	0,265	0,265
4	0,224	0,261	0,266	0,266
5	0,224	0,261	0,266	0,266
6	0,224	0,261	0,266	0,266
7	0,224	0,261	0,266	0,266
8	0,224	0,261	0,266	0,266
9	0,224	0,261	0,266	0,266
ρ_k	0,222	0,259	0,264	0,264

TABLE 9.1 – Réseau d'interfaces fractal fortement localisé : facteurs de réduction d'erreur et moyenne géométrique ρ_k pour la méthode *two-level subspace correction*.

Le tableau 9.1 donne les facteurs de réduction d'erreur

$$\rho_k^{(\nu)} = \frac{\|u_{S_k} - u_{S_k}^{(\nu)}\|}{\|u_{S_k} - u_{S_k}^{(\nu-1)}\|}, \quad \nu = 1, \dots, 9,$$

ainsi que leur moyenne géométrique ρ_k pour $k = 1, \dots, 5$. Nous observons que les facteurs de réduction d'erreur convergent pour chaque k et semblent converger vers 0,266 lorsque k augmente. Selon le critère 9.1 la précision de discrétisation est déjà atteinte après 3 étapes.

9.2 Réseau d'interfaces d'inspiration géologique

Dans notre deuxième expérience numérique, nous considérons un réseau d'interfaces imitant une **structure cristalline fractale**, illustré par la figure 9.1. La construction de ce réseau d'interfaces est détaillée dans [KPY22, p.1478].

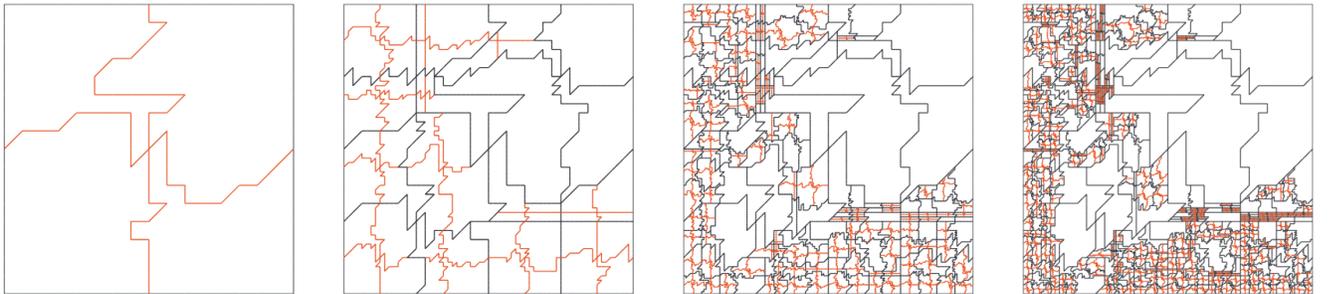


FIGURE 9.1 – Réseau d'interfaces d'inspiration géologique en dimension d'espace $d = 2$: $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1$ (rouge) et $\Gamma^{(k)}$ avec Γ_k (rouge) pour $k = 3, 5, 6$ [KPY22, Fig. 2].

Rigoureusement, ce réseau d'interface ne satisfait pas la condition de localité 6.27 et les autres conditions énoncées dans les théorèmes 6.3, 6.4 et 8.1 ne sont pas non plus vérifiées en général.

Néanmoins, les facteurs de réduction d'erreur tels qu'ils sont présentés dans le tableau 9.2 ne **se dégradent que modérément** par rapport au cas fortement localisé et semblent même converger avec l'augmentation de k . Selon le critère 9.1, la précision de discrétisation est déjà atteinte après 5 étapes.

ν	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
1	0,624	0,696	0,732	0,744	0,748
2	0,675	0,735	0,766	0,775	0,777
3	0,711	0,758	0,781	0,788	0,790
4	0,733	0,773	0,791	0,796	0,798
5	0,746	0,785	0,798	0,803	0,804
6	0,753	0,792	0,804	0,808	0,809
7	0,758	0,798	0,809	0,812	0,813
8	0,761	0,802	0,813	0,816	0,816
9	0,763	0,805	0,816	0,818	0,819
ρ_k	0,723	0,771	0,790	0,795	0,797

TABLE 9.2 – Réseau d’interfaces d’inspiration géologique : facteurs de réduction d’erreur et moyenne géométrique ρ_k pour la méthode *two-level subspace correction*.

Conclusion. La méthode numérique employée est **robuste à la géométrie** du réseau d’interfaces.

Conclusion

Ce rapport de projet de recherche présente une étude de l'article *Numerical homogenization of fractal interface problems* [KPY22] de Ralf Kornhuber, Joscha Podlesny et Harry Yserentant. Ses contributions sont les suivantes :

- (i) il se concentre dans un premier temps sur la construction rigoureuse de l'espace asymptotique fractal \mathcal{H} , en proposant une démonstration complète et détaillée de la procédure de complétion par les classes d'équivalence de suites de Cauchy.
- (ii) il propose également une ébauche de la formulation forte associée aux formulations variationnelles de l'article d'origine.
- (iii) il s'attache enfin à comprendre et motiver la démarche menant à la méthode LOD, en mettant en avant son caractère indispensable face aux méthodes dites classiques pour résoudre numériquement les problèmes considérés, à savoir multi-échelles et non périodiques.

La thèse de Joscha Podlesny a fourni un grand nombre de remarques, d'exemples et d'explications supplémentaires complétant l'article d'origine.

Une piste pour un travail à venir serait de finaliser la démonstration de la formulation forte, en insistant sur les difficultés techniques liées aux conditions aux interfaces. Nous pourrions également approfondir la méthode numérique abordée dans le chapitre 8 ainsi que les expériences numériques réalisées avec cette même méthode.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Mesure de Lebesgue, ensembles non-mesurables, mesures de Hausdorff [Bon]

Définition A.1 (Mesure de Lebesgue). Pour $A \in \mathbf{R}^d$, on définit

$$\mathcal{L}^d(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^d |b_k^i - a_k^i| \mid A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^d (a_k^i; b_k^i) \right\}.$$

Proposition A.1 (Propriétés de \mathcal{L}^d).

- (i) \mathcal{L}^d est une mesure extérieure.
- (ii) \mathcal{L}^d est Borel.
- (iii) \mathcal{L}^d est Borel régulière, i.e. pour tout $A \in P(\mathbf{R}^d)$, il existe $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)$ tel que $A \subset B$ et $\mathcal{L}^d(A) = \mathcal{L}^d(B)$.
- (iv) \mathcal{L}^d est l'unique mesure telle que

$$\mathcal{L}^d \left(\prod_{i=1}^d (a_i; b_i) \right) = \prod_{i=1}^d |b_i - a_i|.$$

- (v) Si T est une isométrie affine, alors

$$\mathcal{L}^d(T(A)) = \mathcal{L}^d(A).$$

Les boréliens sont générés par des pavés (dans \mathbf{R}^d).

Proposition A.2 (Existence de non-mesurables).

- Dans ZF, tous les sous-ensembles de \mathbf{R}^d sont Borel.
- Dans ZFC, il existe des ensembles qui ne sont pas \mathcal{L}^1 -mesurables.

Définition A.2 (Ensemble de Cantor). On définit la suite d'ensembles $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ par

$$\begin{cases} C_{n+1} &= T(C_n) = T_1(C_n) \cup T_2(C_n), \\ C_0 &= [0; 1] \end{cases}$$

où

$$T_1: \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow [0; 1/3] \\ x \longmapsto x/3 \end{array} \qquad T_2: \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow [2/3; 1] \\ x \longmapsto 2/3 + x/3 \end{array}$$

On remarque que $C_{n+1} \subset C_n$ pour tout $n \geq 1$.
On définit l'ensemble de Cantor $C \subset [0; 1]$ par

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Remarque A.1.

- $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} C_{n,k}$ où $\text{diam}(C_{n,k}) = 3^{-n}$.
- $\mathcal{L}^1(C_n) \leq \sum_{k=1}^{2^n} \text{diam}(C_{n,k}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Par théorème du cours

$$\mathcal{L}^1(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^1(C_n) = 0.$$

Proposition A.3 (Ensemble de Cantor).

- Il existe une bijection de C dans $[0; 1]$.
- C est compact d'intérieur vide, i.e. il n'existe aucune boule ouverte B telle que $B \subset C$.
- C ne contient pas de points isolés, i.e.

$$\forall x \in C, \exists (x_n) \subset C \text{ telle que } x_n \longrightarrow x \text{ et } x_n \neq x.$$

Proposition A.4 (Existence de \mathcal{L}^1 -mesurable, non Borel).

- On définit $f: x \in [0; 1] \mapsto x + c(x) \in [0; 2]$. La fonction f est continue et strictement croissante, donc injective.
- $\mathcal{L}^1(f(C)) = 1$.

Définition A.3 (Mesure de Hausdorff). Pour $s \in [0; +\infty)$ et $S \in (0; +\infty)$, on définit

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_s}{2^s} \text{diam}(C_k)^s \mid A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, \text{diam}(C_k) \leq \delta \right\}$$

où α_s une constante de renormalisation telle que $\alpha_d = \mathcal{L}^d(\mathcal{B}(0, 1))$.

Remarque A.2. Si $\delta_1 \leq \delta_2$ alors $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$.

On définit $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$.

Théorème A.1 (Structure de \mathcal{H}^s). Pour tout $s \in [0; +\infty)$, \mathcal{H}^s est une mesure extérieure Borel régulière.

- (i) \mathcal{H}^0 est la mesure de comptage.
- (ii) $\mathcal{H}^d = \mathcal{L}^d$ si $d = s$.

(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ et $\mathcal{H}^s(T(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ pour toute isométrie affine T .

Remarque A.3.

Lemme A.1. Si $0 \leq s, t < +\infty$ avec $s < t$, alors

- si $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$,
- si $\mathcal{H}^t(A) > 0$ alors $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Définition A.4 (Dimension de Hausdorff).

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}}(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf\{s \in [0; +\infty) \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t \in [0; +\infty) \mid \mathcal{H}^t(A) = +\infty\} \end{aligned}$$

Remarque A.4. Pour calculer $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ on cherche un $s \in [0; +\infty)$ tel que

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < +\infty.$$

Théorème A.2 (Caractérisation de $\dim_{\mathcal{H}}$ pour les ensembles auto-similaires). Si S_1, \dots, S_m sont des similitudes de rapports r_1, \dots, r_m et si C est un ensemble tel que

$$C = \bigcup_{i=1}^m S_i(C)$$

alors, $s = \dim_{\mathcal{H}}(C)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^m r_i^s = 1$.

Corollaire A.1. Si C est l'ensemble de Cantor, $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Annexe B

Espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$ pour $0 < s < 1$ [DD07, p.194]

Définition B.1. Soient $s \in]0; 1[$ et $p \in]1; +\infty[$. On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+N}} dx dy < +\infty \right\}.$$

Proposition B.1. Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^d . Pour $s \in]0; 1[$, l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{s,p} = \left(\|u\|_p^p + [\|u\|'_{s,p}]^p \right)^{1/p}, \quad \text{où } [\|u\|'_{s,p}]^p = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+d}} dx dy,$$

est un espace de Banach.

Nous aurons besoin de deux lemmes pour démontrer ce résultat.

Lemme B.1. Si $1 \leq p < +\infty$ et si la suite $(f_n) \subset L^p(E, \mathcal{F}, \mu)$ converge vers une limite f dans L^p , il existe des sous-suites (f_{n_k}) qui convergent presque partout vers f : pour μ -presque tout $x \in E$, la suite numérique $(f_{n_k}(x))_k$ converge vers $f(x)$.

■ **Démonstration.** Soit f la limite en norme L^p de la suite $(f_n) \subset L^p$; on peut trouver une sous-suite (n_k) telle que $\|f_{n_k} - f\|_p < 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$; alors en posant $u_k = |f_{n_k} - f|^p \geq 0$ on a

$$\int_E u_k d\mu = \int_E |f_{n_k} - f|^p d\mu = \|f_{n_k} - f\|_p^p < 2^{-kp}$$

et par le théorème de convergence monotone, version séries de fonctions positives,

$$\int_E \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_E u_k(x) d\mu(x) \right) < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kp} < +\infty;$$

puisque l'intégrale est finie, la somme de la série positive $\sum u_k(x)$ est finie μ -presque partout, et la convergence de cette série numérique implique en particulier que son terme général $u_k(x) = |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$ tend vers 0 pour μ -presque tout $x \in E$; on a donc bien trouvé une sous-suite (f_{n_k}) telle que pour μ -presque tout x , $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$. \square

Lemme B.2 (de Fatou, (Poly M2 de Ayman Moussa)). Pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions mesurables sur \mathbf{R}^d à valeurs dans $[0; +\infty]$, la limite inférieure simple $\liminf_n f_n$ est mesurable et

$$\int_{\mathbf{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^d} f_n.$$

■ **Démonstration (de la proposition).** Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{s,p}$. En particulier $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans L^p , elle converge donc dans L^p vers une fonction u appartenant à L^p . D'autre part, la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des fonctions définies par

$$v_n(x, y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x - y|^{s+d/p}}$$

est donc une suite de Cauchy dans L^p et converge aussi vers un élément de L^p . D'après le lemme, on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge presque partout vers u . On remarque alors que $v_{\sigma(n)}(x, y)$ converge, pour presque tout couple (x, y) , vers $v(x, y) = (u(x) - u(y)) |x - y|^{-s-d/p}$. En utilisant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |v(x, y)|^p dx dy = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+d}} dx dy \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\sigma(n)}(x) - u_{\sigma(n)}(y)|^p}{|x - y|^{sp+d}} dx dy < +\infty,$$

et la dernière majoration vient du fait que (u_n) est une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{s,p}$, et donc $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Pour montrer que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$, il reste à montrer que $\|u - u_n\|'_{s,p} \rightarrow 0$, *i.e.* que $\|v - v_n\|_{L^p(\Omega \times \Omega)} \rightarrow 0$ ce qui est le cas car $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans L^p . Finalement, nous avons montré que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{s,p}(\Omega)$. \square

Annexe C

Démonstration de l'inégalité de Poincaré–Wirtinger

Théorème C.1 (Rellich). Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^d de classe \mathcal{C}^1 . Alors, de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Théorème C.2 (Inégalité de Poincaré–Wirtinger, [CLog, p.36]). Soit Ω un ouvert borné et connexe. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} v(x) \, dx \right)^2 \right).$$

Lemme C.1. On considère un ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ connexe, borné et régulier de classe \mathcal{C}^1 . Soit Φ une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ telle que $\Phi(1_{\Omega}) \neq 0$, où 1_{Ω} est la fonction constante égale à 1 sur Ω . Alors, il existe une constante C_{Ω} telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\Phi(v)|).$$

■ **Démonstration.** On raisonne par l'absurde et on suppose donc que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \exists v_n \in H^1(\Omega), \quad \|v_n\|_{L^2(\Omega)} > n(\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} + |\Phi(v_n)|).$$

On peut normaliser v_n par sa norme $L^2(\Omega)$ (puisqu'elle n'est pas nulle), on a donc que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \\ \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} + |\Phi(v_n)| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ et comme Ω est borné et régulier, on peut appliquer le théorème de Rellich. On peut donc en extraire une sous-suite notée $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ qui converge (fortement) au sens de la norme $L^2(\Omega)$ vers $z \in L^2(\Omega)$. La norme étant une fonction continue de $L^2(\Omega)$ dans \mathbf{R} , on a :

$$\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Par ailleurs, de $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{n}$, on en déduit que la suite $(\nabla z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge fortement (au sens de la norme L^2) vers $0 \in L^2(\Omega)^d$. La suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc converge vers

$w \in H^1(\Omega)$, puisque $H^1(\Omega)$ est complet. Par unicité de la limite dans $L^2(\Omega)$, on a $z = w$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test, on a pour tout $1 \leq i \leq d$,

$$\int_{\Omega} z_n(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial z_n}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx$$

soit, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$ et en rebasculant la dérivée partielle sur z ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = 0.$$

On en déduit que la i -ème dérivée partielle faible de z est égale à 0 au sens des distributions et comme ces dérivées partielles sont dans $L^2(\Omega)$, puisque $z \in H^1(\Omega)$, on a finalement que $\nabla z = 0$ presque partout. De plus, comme Ω est connexe, la fonction z est constante égale à Z sur Ω . Montrons que $Z = 0$. De $|\Phi(v_n)| < \frac{1}{n}$, en utilisant la continuité et la linéarité de Φ de $H^1(\Omega)$ dans \mathbf{R} , il vient $\Phi(z) = Z\Phi(1_{\Omega}) = 0$. Sous l'hypothèse, indispensable, $\Phi(1_{\Omega}) \neq 0$, il vient $z = Z = 0$, ce qui contredit $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$. \square

■ **Démonstration (de l'inégalité de Poincaré–Wirtinger).** On considère l'application

$$\begin{aligned} H^1(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \Phi: \quad v &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_{\Omega} v(x) dx \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ puisque par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_{\Omega} v(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \times \sqrt{|\Omega|} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, $\Phi(1_{\Omega}) = \sqrt{|\Omega|} \neq 0$. Nous pouvons donc appliquer le lemme, selon lequel il existe C_{Ω} tel que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \int_{\Omega} v(x) dx \right).$$

En élevant au carré, on obtient finalement le résultat

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} v(x) dx \right)^2 \right)$$

avec $C = 2C_{\Omega}$. \square

Annexe D

Construction du complété d'un EVN à l'aide de classes de suites de Cauchy [BBH21]

Théorème D.1. *Il est toujours possible de compléter un espace vectoriel normé incomplet $(E, \|\cdot\|)$, plus précisément de construire un espace vectoriel normé complet \mathcal{E} tel que E s'identifie à un sous-espace dense de \mathcal{E} .*

Définition D.1 (Relation d'équivalence). Une relation d'équivalence \sim sur un ensemble \mathcal{U} est une relation binaire qui est :

- *réflexive* : $U \sim U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$;
- *symétrique* : $U \sim V \implies V \sim U$ pour tout $(U, V) \in \mathcal{U}^2$;
- *transitive* : $(U \sim V \text{ et } V \sim W) \implies U \sim W$ pour tout $(U, V, W) \in \mathcal{U}^3$.

La classe d'équivalence \dot{U} associée à un élément $U \in \mathcal{U}$ est l'ensemble de tous les $V \in \mathcal{U}$ tels que $V \sim U$, appelés *représentants de la classe*. Enfin, l'ensemble de ces classes d'équivalences est appelé *l'ensemble quotient* de \mathcal{U} par la relation d'équivalence.

■ **Démonstration.** Le point de départ consiste à définir une relation d'équivalence sur l'espace, noté \mathcal{C} , des suites de Cauchy de E : on dit que deux suites de Cauchy $U = (u_n)$ et $V = (v_n)$ sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$, *i.e.*

$$\forall U, V \in \mathcal{C}, \quad U \sim V \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0.$$

Appelons \mathcal{E} l'espace des classes d'équivalence pour cette relation : la classe $\dot{U} \in \mathcal{E}$ associée à une suite de Cauchy $U = (u_n)$ est l'ensemble de toutes les suites de Cauchy $V = (v_n)$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$, *i.e.*

$$\dot{U} = \{V \in \mathcal{C} \mid V \sim U\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \{\dot{U} \mid U \in \mathcal{C}\}.$$

L'ensemble \mathcal{E} est l'ensemble quotient de \mathcal{C} par la relation d'équivalence \sim , ce qui se note $\mathcal{E} = \mathcal{C} / \sim$. Pour une classe \dot{U} , la quantité

$$\|\dot{U}\|_{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|$$

existe car $(\|u_n\|)$ est une suite de Cauchy de \mathbf{R} d'après l'inégalité triangulaire inversée. De plus, cette quantité ne dépend pas du représentant $U = (u_n)$ choisi dans la classe. En effet, par le même argument, $\lim \|u_n\| = \lim \|v_n\|$ dès que $\lim \|u_n - v_n\| = 0$. Enfin, on vérifie sans difficulté que $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ définit une norme sur \mathcal{E} :

- soit $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\lambda u_n\| = |\lambda| \|u_n\|$, puis on passe à la limite ;
- soient (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy, $\|u_n + v_n\| \leq \|u_n\| + \|v_n\|$, puis on passe à la limite ;

— soit $\dot{U} \in \mathcal{E}$ tel que $\|\dot{U}\|_{\mathcal{E}} = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$ soit (u_n) est équivalent à la suite nulle donc $\dot{U} = \dot{0}$.

Remarquons par ailleurs qu'on peut identifier E à un sous-espace de \mathcal{E} en considérant, pour tout $u \in E$, la suite constante (donc de Cauchy), notée \tilde{u} , dont tous les termes sont égaux à u . L'ensemble \tilde{E} des classes d'équivalences correspondantes, soit $\tilde{E} = \{\tilde{u} \in \mathcal{E} \mid u \in E\}$, est un sous-espace de \mathcal{E} , et on a par construction

$$\|\tilde{u}\|_{\mathcal{E}} = \|u\| \quad \forall u \in E. \quad (\text{D.1})$$

□

$$u \in E \xrightarrow{\text{suite associée}} \tilde{u} \in \mathcal{C} \xrightarrow{\text{classe d'équivalence}} \tilde{u} \in \tilde{E} \subset \mathcal{E}$$

FIGURE D.1 – Diagramme des espaces dans la construction du complété d'un EVN

Proposition D.1. Avec les notations ci-dessus, l'espace \mathcal{E} muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ est complet, et \tilde{E} est dense dans \mathcal{E} .

■ **Démonstration.**

— Vérifions tout d'abord que \tilde{E} est dense dans \mathcal{E} . Soit $U = (u_n)$ une suite de Cauchy de E . Pour tout $m \in \mathbf{N}$, notons comme précédemment \tilde{u}_m la suite constante égale à u_m . Montrons que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_m - \dot{U}\|_{\mathcal{E}} = 0, \quad (\text{D.2})$$

autrement dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad m > N \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon.$$

Il s'agit en fait d'une conséquence immédiate de la définition d'une suite de Cauchy où il suffit de passer à la limite $n \rightarrow \infty$.

— Montrons maintenant que \mathcal{E} muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ est complet. Soit (\dot{U}_n) une suite de Cauchy de \mathcal{E} (c'est-à-dire une suite de Cauchy de suites de Cauchy!). D'après le résultat de densité qui précède, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut trouver $u_n \in E$ tel que $\|\tilde{u}_n - \dot{U}_n\|_{\mathcal{E}} \leq \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{u}_n - \dot{U}_n\|_{\mathcal{E}} = 0. \quad (\text{D.3})$$

La suite (\dot{U}_n) étant de Cauchy, il s'ensuit que (\tilde{u}_n) l'est aussi puisque

$$\|\tilde{u}_m - \tilde{u}_n\|_{\mathcal{E}} \leq \|\tilde{u}_m - \dot{U}_m\|_{\mathcal{E}} + \|\dot{U}_m - \dot{U}_n\|_{\mathcal{E}} + \|\dot{U}_n - \tilde{u}_n\|_{\mathcal{E}}.$$

D'après D.1, ceci signifie que (u_n) est une suite de Cauchy de E . Notons U cette suite. D'après D.2 et D.3, on conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{U}_n - \dot{U}\|_{\mathcal{E}} = 0$.

□

Remarque D.1. Notons qu'avec cette construction de \mathcal{E} , nous n'avons pas tout à fait répondu à la question initiale qui était de trouver ce qu'on pourrait appeler un «sur-espace» de E . Nous avons en fait construit un espace qui n'est pas de même nature que l'espace de départ, où le second s'identifie à un sous-espace du premier. En effet, \mathcal{E} contient non pas des éléments de E mais des classes d'équivalence de suites de Cauchy de E .

Annexe E

Divers

E.1 Intégrale de surface [BBH21, p.40]

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^d . Sa frontière que nous noterons $\partial\Omega$, est définie par $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ où $\bar{\Omega}$ désigne l'adhérence de Ω . Nous allons supposer que $\partial\Omega$ peut être représentée par le graphe d'une fonction $F: \mathbf{R}^{d-1} \rightarrow \mathbf{R}$. Dans un repère orthonormé donné, on note $x = (\underline{x}, x_d)$ les coordonnées d'un point courant de \mathbf{R}^d , où $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$ représente les $d-1$ premières coordonnées. Considérons le domaine

$$\Omega = \{(\underline{x}, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x_d > F(\underline{x})\}$$

dont la frontière est simplement

$$\partial\Omega = \{(\underline{x}, x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x_d = F(\underline{x})\}.$$

Nous supposons que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^{d-1})$. Ainsi, pour deux points voisins \underline{x} et \underline{y} de \mathbf{R}^{d-1} , le développement limité à l'ordre 1 de F s'écrit

$$F(\underline{y}) - F(\underline{x}) = (\underline{y} - \underline{x}) \cdot \underline{\nabla} F(\underline{x}) + o(|\underline{y} - \underline{x}|),$$

où on a noté $\underline{\nabla} F = (\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_{d-1})$ le gradient de F par rapport aux coordonnées \underline{x} . Ce développement montre que le plan tangent à la frontière $\partial\Omega$ au point $(\underline{x}, F(\underline{x}))$ est l'ensemble des points $(\underline{y}, y_d) \in \mathbf{R}^d$ qui vérifient l'équation

$$y_d - F(\underline{x}) = (\underline{y} - \underline{x}) \cdot \underline{\nabla} F(\underline{x}).$$

La droite normale à ce plan est engendrée par exemple par le vecteur $(\underline{\nabla} F(\underline{x}), -1)$, qui est orienté vers l'extérieur de Ω . Ainsi, la *normale unitaire extérieure* en un point $x = (\underline{x}, F(\underline{x})) \in \partial\Omega$ est le vecteur $n = n(x) \in \mathbf{R}^d$ défini par

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\underline{\nabla} F(\underline{x})|^2}} (\underline{\nabla} F(\underline{x}), -1).$$

Comme nous avons supposé que F est de classe \mathcal{C}^1 , il est clair que $n(x)$ est une fonction continue sur $\partial\Omega$. On définit par ailleurs l'*intégrale de surface* sur $\partial\Omega$ par

$$\int_{\partial\Omega} u(x) d\sigma(x) = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} u(\underline{x}, F(\underline{x})) \sqrt{1 + |\underline{\nabla} F(\underline{x})|^2} d\underline{x},$$

par exemple pour une fonction u continue et à support compact.

E.2 Formule des sauts [BBH21, p.56]

Soit $u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, ce qui signifie qu'il existe un nombre fini de points $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ tels que les restrictions de u aux intervalles $]-\infty; a_1[$, $]a_1; a_2[$, \dots , $]a_n; +\infty[$ appartiennent respectivement à $\mathcal{C}^1(]-\infty; a_1[)$, $\mathcal{C}^1([a_1; a_2])$, \dots , $\mathcal{C}^1([a_n; +\infty[)$. En particulier u admet des limites à gauche et à droite en chaque point a_i , notées respectivement $u(a_i^-)$ et $u(a_i^+)$. Alors la dérivée au sens des distributions de u est donnée par

$$u' = \{u'\} + \sum_{i=1}^n (u(a_i^+) - u(a_i^-)) \delta_{a_i},$$

où $\{u'\}$ désigne la fonction continue par morceaux égale à la dérivée usuelle de u sur chacun des intervalles $]-\infty; a_1[$, $]a_1; a_2[$, \dots , $]a_n; +\infty[$.

E.3 Formule de Green avec saut ¹

Soient $k \in \mathbf{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)^d$. Montrons que pour tout $v_k \in \mathcal{H}_k$,

$$\int_{\Omega} v_k \nabla \cdot \varphi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \varphi \, dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket v_k \rrbracket \varphi \cdot \nu_j \, d\Gamma_j.$$

Tout d'abord, décomposons le terme de gauche

$$\int_{\Omega} v_k \nabla \cdot \varphi \, dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx.$$

Soit $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$. Comme $\Gamma^{(k)}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbf{R}^d ,

$$\int_{\Omega} v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx = \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \int_G v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx$$

Or, pour tout $G \in \Omega^{(k)}$, $v_k|_G \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$, donc on peut appliquer une formule de Green soit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \, dx &= \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \left[- \int_G \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \varphi_i \, dx + \int_{\partial G} v_k \varphi_i \mathbf{n}_{G,i} \, d\Gamma \right] \\ &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \varphi_i \, dx + \sum_{G \in \Omega^{(k)}} \int_{\partial G} v_k \varphi_i \mathbf{n}_{G,i} \, d\Gamma \\ \text{d'après le dév. suivant} &= - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \varphi_i \, dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket v_k \rrbracket(\Gamma_j) \varphi_i \mathbf{n}_{\Gamma_j,i} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Finalement, en sommant sur $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, on obtient

$$\int_{\Omega} v_k \nabla \cdot \varphi \, dx = - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \varphi + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_j} \llbracket v_k \rrbracket(\Gamma_j) \varphi_i \mathbf{n}_{\Gamma_j,i} \, d\Gamma = - \int_{\Omega \setminus \Gamma^{(k)}} \nabla v_k \cdot \varphi + \sum_{j=1}^k \int_{\Gamma_j} \llbracket v_k \rrbracket(\Gamma_j) \varphi \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_j} \, d\Gamma$$

et on obtient le résultat en omettant l'interface dans le saut et en notant $\nu_j = \mathbf{n}_{\Gamma_j}$.

E.4 Interfaces and jumps

1. https://people.tamu.edu/~guermond/M610_SPRING_2016/chap14.pdf

Définition E.1 (Saut au travers d'une interface). Soient une interface Γ et G_1, G_2 deux cellules telles que $\Gamma = \partial G_1 \cap \partial G_2$. Le *saut* de v au travers de l'interface Γ est défini par

$$[[v]]_{\Gamma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} v|_{G_1}(x) - v|_{G_2}(x) \quad \text{p.p. } x \in \Gamma.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^d$,

$$\begin{aligned} \int_D v \nabla \cdot \varphi \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K v|_K \nabla \cdot \varphi \, dx \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla(v|_K) \cdot \varphi \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} v|_K \mathbf{n}_K \cdot \varphi \, ds \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla(v|_K) \cdot \varphi \, dx + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\circ} \int_F [[v]]_F \mathbf{n}_F \cdot \varphi \, ds, \end{aligned}$$

où \mathbf{n}_K est le vecteur normal unitaire sortant de K et \mathbf{n}_F is as in Definition.

E.5 Première forme fondamentale & Calcul de la longueur d'un arc tracé sur une surface [Buso4]

Soit X une surface de \mathbf{R}^3 . En tout point de X la plan tangent hérite d'une structure euclidienne (existence d'un produit scalaire) de l'espace ambiant \mathbf{R}^3 .

Soit $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une paramétrisation locale de X . On sait que l'espace tangent à X est engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ (on omet volontairement de ne pas préciser le point de X que l'on considère pour alléger les notations). Tout vecteur w de l'espace tangent s'écrit donc

$$w = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v},$$

où a et b sont des réels. Au produit scalaire sur l'espace tangent à X (qui est induit par celui de \mathbf{R}^3) est associée une forme quadratique (dépendant du point (u, v)) appelée *première forme fondamentale* de la surface X :

$$\|w\|^2 = a^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2 + 2ab \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + b^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2.$$

Définition E.2. La forme quadratique $I_P(w) \stackrel{\text{def}}{=} \|w\|^2$ sur $T_P X$, P étant un point de X et $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une paramétrisation locale de X telle que $X(0, 0) = P$, s'appelle la *première forme fondamentale* de X en P . On note

$$E = \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0, 0) \right\|^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial X}{\partial v}(0, 0) \right\rangle \quad \text{et} \quad G = \left\| \frac{\partial X}{\partial v}(0, 0) \right\|^2.$$

Ainsi, si $w = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}$, alors $I_P(w) = a^2 E + 2ab F + b^2 G$.

Nous pouvons maintenant calculer de la longueur d'un arc tracé sur une surface. Soit $X \subset \mathbf{R}^3$ une surface localement paramétrée par $(u, v) \mapsto X(u, v)$. Soit $t \in I \mapsto c(t) = (u(t), v(t))$ une courbe tracée dans le domaine des paramètres, où I est un intervalle de \mathbf{R} . La longueur de l'arc de courbe

$t \in I \mapsto X(u(t), v(t)) = X \circ c(t)$ tracée sur X est donnée par

$$\begin{aligned} \text{long}(X \circ c) &= \int_I \|(X \circ c)'(t)\| dt \\ &= \int_I \left\| u'(t) \frac{\partial X}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial X}{\partial v} \right\| dt \\ &= \int_I \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G} dt. \end{aligned}$$

Cette formule est souvent résumée par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, où les différentielles sont prises par rapport à la variable t et s désigne l'abscisse curviligne de la courbe tracée sur X .

E.6 Théorème du graphe fermé [JZ21]

Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

Définition E.3 (Graphe). Le *graphe* d'une application T de E dans F est le sous-ensemble de $E \times F$ défini par $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) \mid x \in E\}$.

Remarque E.1. Lorsque T est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de E et F , son graphe est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Définition E.4. On dit qu'un opérateur T de E (e.v.n.) dans F (e.v.n.) est *fermé* si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Remarque E.2. Sous entendu, $E \times F$ est muni de la norme produit $\|(x, y)\|_{E \times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$.

Théorème E.1. *Tout opérateur borné d'un espace vectoriel normé dans un autre est fermé.*

Dans les Banach, la réciproque est vraie.

Théorème E.2 (Graphe fermé). *Tout opérateur fermé d'un espace de Banach dans un autre est borné.*

E.7 Théorème de trace

Théorème E.3 (Premier théorème de trace). *L'application trace*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ \gamma_0: \quad v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

vérifie

$$\exists C_0, \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, l'application se prolonge par continuité en

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \\ \gamma_0: \quad v &\longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

qui vérifie

$$\exists C_0, \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

E.8 Le théorème de projection [BBH21]

Lemme E.1. Soient E un sous-espace vectoriel fermé de H et P l'opérateur qui à $u \in H$ associe sa projection Pu sur le sous-espace E . Alors on a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $u \in H$, Pu est caractérisé par

$$Pu \in E \quad \text{et} \quad (u - Pu, v) = 0 \quad \forall v \in E.$$

(ii) P est un opérateur linéaire de H dans H .

(iii) Pour tout $u \in H$, $\|Pu\| \leq \|u\|$. P est donc un opérateur continu de H dans H . On dit que P est l'opérateur de **projection orthogonale** sur E .

Corollaire E.1. Si E est un sous-espace vectoriel fermé de H , alors :

$$H = E \oplus E^\perp.$$

Bibliographie

- [AH15] Assyr ABDULLE et Patrick HENNING. “A reduced basis localized orthogonal decomposition”. In : *Journal of Computational Physics* 295 (août 2015), p. 379-401. ISSN : 0021-9991. DOI : [10.1016/j.jcp.2015.04.016](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.04.016). URL : <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2015.04.016>.
- [Alo] François ALOUGES. “Introduction to periodic homogenization”. URL : <http://www.cmap.polytechnique.fr/%7Ealouges/Homogenization/CoursHomog.pdf>.
- [BBH21] Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA, Laurent BOURGEOIS et Christophe HAZARD. “Outils élémentaires d’analyse pour les Équations aux Dérivées Partielles”. ENSTA Paris. Cours MA102. France, sept. 2021. URL : <https://hal.science/hal-04061707>.
- [BL22] Xavier BLANC et Claude LE BRIS. *Homogénéisation en milieu périodique... ou non - Une introduction*. fr. Mathématiques et Applications. Cham : Springer International Publishing, 2022. ISBN : 978-3-031-12800-4.
- [Bon] Benoît BONNET-WEILL. *Notes de cours de AOT11*. Théorie de la Mesure et Intégration au sens de LEBESGUE - Approches Géométriques et Fonctionnelles. D’après le cours d’enseignement thématique AOT11 à ENSTA Paris.
- [Buso4] Laurent BUSÉ. “Géométrie différentielle et applications”. Master. Lecture. Université de Nice Sophia Antipolis, 2004. URL : <https://cel.hal.science/inria-00101755>.
- [Caro6] Carsten CARSTENSEN. “Clément Interpolation and Its Role in Adaptive Finite Element Error Control”. In : *Partial Differential Equations and Functional Analysis : The Philippe Clément Festschrift*. Sous la dir. d’Erik KOELINK et al. Basel : Birkhäuser Basel, 2006, p. 27-43. ISBN : 978-3-7643-7601-7. DOI : [10.1007/3-7643-7601-5_2](https://doi.org/10.1007/3-7643-7601-5_2). URL : https://doi.org/10.1007/3-7643-7601-5_2.
- [CFoo] Carsten CARSTENSEN et Stefan A. FUNKEN. “Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori estimates in finite element methods”. In : 2000. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119977698>.
- [CLog] Patrick CIARLET et Éric LUNÉVILLE. *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique. Tome 1 : Concepts généraux*. Les Presses de l’ENSTA, 2009, p. 194. URL : <https://inria.hal.science/hal-04039611>.
- [DDo7] Françoise DEMENGEL et Gilbert DEMENGEL. *Espaces fonctionnels – Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*. EDP Sciences, 2007.
- [HKP19] Martin HEIDA, Ralf KORNUBER et Joscha PODLESNY. *Fractal homogenization of multiscale interface problems*. 2019. arXiv : [1712.01172](https://arxiv.org/abs/1712.01172) [math.AP].
- [Hum00] H.K. HUMMEL. *Homogenization of Periodic and Random Multidimensional Microstructures*. Freiburger Forschungshefte / E. TU Bergakad., 2000. ISBN : 9783860121252. URL : <https://books.google.fr/books?id=G0wGtwAACAAJ>.
- [JZ21] Patrick JOLY et Hasnaa ZIDANI. “Introduction à l’Analyse Fonctionnelle”. ENSTA Paris. Cours ANA201. 2021.

- [KPY18] Ralf KORNHUBER, Daniel PETERSEIM et Harry YSERENTANT. “An analysis of a class of variational multiscale methods based on subspace decomposition”. In : *Mathematics of Computation* 87.314 (jan. 2018), p. 2765-2774. ISSN : 1088-6842. DOI : [10.1090/mcom/3302](https://doi.org/10.1090/mcom/3302). URL : <http://dx.doi.org/10.1090/mcom/3302>.
- [KPY22] Ralf KORNHUBER, Joscha PODLESNY et Harry YSERENTANT. “Numerical homogenization of fractal interface problems”. In : *ESAIM : M2AN* 56.4 (2022), p. 1451-1481. DOI : [10.1051/m2an/2022046](https://doi.org/10.1051/m2an/2022046). URL : <https://doi.org/10.1051/m2an/2022046>.
- [KY16] Ralf KORNHUBER et Harry YSERENTANT. “Numerical Homogenization of Elliptic Multiscale Problems by Subspace Decomposition”. In : *Multiscale Modeling & Simulation* 14.3 (2016), p. 1017-1036. DOI : [10.1137/15M1028510](https://doi.org/10.1137/15M1028510). eprint : <https://doi.org/10.1137/15M1028510>. URL : <https://doi.org/10.1137/15M1028510>.
- [MP13] Axel MÅLQVIST et Daniel PETERSEIM. *Localization of Elliptic Multiscale Problems*. 2013. arXiv : [1110.0692](https://arxiv.org/abs/1110.0692) [math.NA].
- [Pet] Daniel PETERSEIM. “Numerical Homogenization by Localized Orthogonal Decomposition (Lecture 1)”. URL : https://youtu.be/CCrbSCcW_zE?si=9F0mSb1bIB--6_Z9.
- [Pod22] Joscha PODLESNY. “Multiscale Modeling and Simulation of Deformation Accumulation in Fault Networks”. Dissertation. 2022. URL : <http://dx.doi.org/10.17169/refubium-35685>.
- [Ver99] Rüdiger VERFÜRTH. “Error estimates for some quasi-interpolation operators”. In : *ESAIM : M2AN* 33.4 (1999), p. 695-713. DOI : [10.1051/m2an:1999158](https://doi.org/10.1051/m2an:1999158). URL : <https://doi.org/10.1051/m2an:1999158>.
- [Voh] Martin VOHRALÍK. “Analysis and approximation of partial differential equations by finite elements”. Lecture notes, Cours ANN202. URL : <https://who.rocq.inria.fr/Martin.Vohralik/Enseig/FEM/FEM.pdf>.